詳細解答

STEP III 2000，第 1 題

純數學 • 雙曲線的切線

> **STEP III 2000，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/00-s3-q1

關鍵思路

兩條曲線都是以原點為中心的等軸雙曲線（rectangular hyperbola），而且在半周旋轉（half-turn）$(x, y) \mapsto (-x, -y)$ 之下都保持不變。這個對稱性（symmetry）讓我們不費吹灰之力就得到 Q。至於切線（tangent），巧妙的做法不是硬解聯立方程，而是利用 $ab = 1$ 和 $a^2 - b^2 = 2$ 這兩個事實，驗證題目給出的點同時位於兩條直線上。求得四個點之後，繞原點旋轉四分之一周就能解釋為何得出正方形。

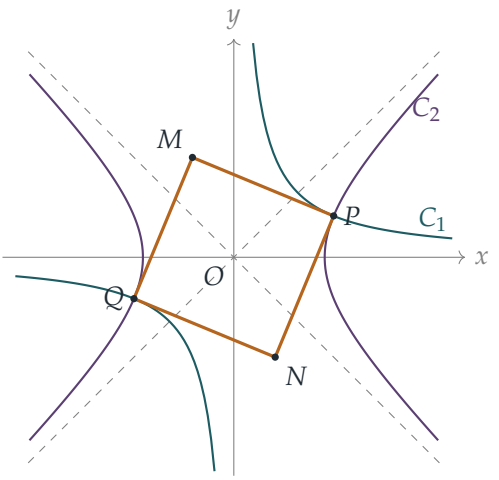
解答

略圖

C_1，即 $xy = 1$，是大家熟悉的等軸雙曲線，位於第一和第三象限，以兩條坐標軸為漸近線（asymptote）。

C_2，即 $x^2 - y^2 = 2$，與 x 軸相交於 $(\pm\sqrt{2}, 0)$，且永不與 y 軸相交（否則需要 $-y^2 = 2$）。寫成 $y^2 = x^2 - 2$，可見 $|y| < |x|$，而且當 $|x|$ 很大時 $y \approx \pm x$，所以它的漸近線是 $y = \pm x$。它就是把 C_1 繞原點旋轉 45°（並按 $\sqrt{2}$ 的比例放大）所得的曲線，兩支分別向左、右開口。

兩條曲線在哪裏相交？由於 $xy = 1 > 0$，任何公共點都位於第一或第三象限。把 $y = 1/x$ 代入 C_2，得 $x^4 - 2x^2 - 1 = 0$，所以 $x^2 = 1 + \sqrt{2}$（另一個根 $1 - \sqrt{2}$ 是負數）。因此恰好有兩個交點，在這兩個象限中各有一個。



圖中藍綠色的是 C_1，紫紅色的是 C_2，虛線是 C_2 的漸近線 $y = \pm x$。琥珀色的正方形 $PMQN$ 就是我們即將求出的圖形。

點 Q

把 (x, y) 換成 $(-x, -y)$，xy 和 $x^2 - y^2$ 都保持不變。所以若 (a, b) 同時位於兩條曲線上，則 $(-a, -b)$ 亦然。由於只有兩個交點，

$$Q = (-a, -b).$$

以下我們會一直用到 P 同時位於兩條曲線上所帶來的兩個事實：

$$ab = 1, \qquad a^2 - b^2 = 2.$$

切線

對於 C_1，把 $xy = 1$ 作隱函數求導（implicit differentiation），得 $y + x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$，所以 C_1 在其上一點 (p, q) 的斜率（gradient）是 $-q/p$。該點的切線是 $p(y - q) = -q(x - p)$，即

$$qx + py = 2pq = 2.$$

對於 C_2，把 $x^2 - y^2 = 2$ 求導，得 $2x - 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$，所以在 (p, q) 的斜率是 p/q。切線是 $q(y - q) = p(x - p)$，即

$$px - qy = p^2 - q^2 = 2.$$

（即使在切線垂直的點，這兩個形式仍然成立；它們其實就是曲線的梯度向量（gradient vector）與 (x, y) 的點積。）代入 $P = (a, b)$ 和 $Q = (-a, -b)$：

$$\begin{aligned}
\text{曲線}C_1\text{ 的切線，切點為}P: &\quad bx + ay = 2,\\
\text{曲線}C_2\text{ 的切線，切點為}Q: &\quad -ax + by = 2,\\
\text{曲線}C_2\text{ 的切線，切點為}P: &\quad ax - by = 2,\\
\text{曲線}C_1\text{ 的切線，切點為}Q: &\quad -bx - ay = 2.
\end{aligned}$$

點 M

M 是頭兩條直線的交點。試代入 $(x, y) = (-b, a)$：

$$\begin{aligned}
bx + ay &= -b^2 + a^2 = 2,\\
-ax + by &= ab + ab = 2ab = 2.
\end{aligned}$$

所以 $(-b, a)$ 同時位於兩條直線上。這兩條直線並不平行，因為係數的行列式（determinant）是 $b \cdot b - a \cdot (-a) = a^2 + b^2 \neq 0$，所以它們恰好相交於一點。因此

$$M = (-b, a),$$

正如題目所求。

想一想 驗證一個已給出的答案，不是比直接求解來得弱嗎？

在這裏並非如此。兩條不平行的直線恰好相交於一點，所以任何同時位於兩條直線上的點就是交點。直接求解當然也可以，但到頭來我們還是要用 $ab = 1$ 和 $a^2 - b^2 = 2$ 來整理答案。

點 N

同樣地，N 是 $ax - by = 2$ 與 $-bx - ay = 2$ 的交點。代入點 $(b, -a)$ 得

$$ab + ab = 2, \qquad -b^2 + a^2 = 2,$$

而行列式是 $a(-a) - (-b)(-b) = -(a^2 + b^2) \neq 0$。所以

$$N = (b, -a).$$

***PMQN* 是正方形**

看看這四個位置向量（position vector）：

$$P = (a, b), \quad M = (-b, a), \quad Q = (-a, -b), \quad N = (b, -a).$$

繞 O 逆時針旋轉 90° 會把 (x, y) 送到 $(-y, x)$。所以它把 $P \to M \to Q \to N \to P$。這已經暗示了答案；以下是一個直接的論證。

- 對角線 PQ 和 MN 的中點都是 O，所以它們互相平分，$PMQN$ 是平行四邊形（parallelogram）。
- 兩條對角線的長度都是 $2\sqrt{a^2 + b^2}$，所以它們相等，這個平行四邊形是長方形。
- $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OM} = a(-b) + b(a) = 0$，所以對角線互相垂直，這個長方形是菱形（rhombus）。

既是長方形又是菱形的四邊形就是正方形。頂點的次序也正確：P、M、Q、N 繞 O 依次相隔四分之一周，所以 $PMQN$ 是沿着正方形繞一圈，而不是自我交叉。因此 $PMQN$ 是正方形。 ■

它的邊長的平方是 $|PM|^2 = (a + b)^2 + (b - a)^2 = 2(a^2 + b^2)$。由於 $a^2 = 1 + \sqrt{2}$ 及 $b^2 = 1/a^2 = \sqrt{2} - 1$，這個值是 $4\sqrt{2}$。

驗算

- 以數值計算，$a = \sqrt{1 + \sqrt{2}} \approx 1.5538$ 及 $b \approx 0.6436$。用數值方法求切線的交點，得 $M \approx (-0.6436, 1.5538)$ 和 $N \approx (0.6436, -1.5538)$，與所述相符。四條邊的長度都是 $2.3784 \approx \sqrt{4\sqrt{2}}$，而且相鄰的邊互相垂直。
- P 的方向角是 $\arctan(b/a) = \arctan(\sqrt{2} - 1) = 22.5°$，剛好在 C_1 的漸近線 $y = 0$ 與 C_2 的漸近線 $y = x$ 的正中間，所以正方形傾斜了 22.5°，正如略圖所示。

常見錯誤

- 把 C_2 的切線寫成 $px + qy = 2$。負號十分重要，正是它令整個運算行得通。
- 憑空猜測有反射對稱，於是取 $Q = (b, a)$ 或 $(-b, -a)$。對 $y = x$ 的反射會保持 C_1 不變，但不會保持 C_2 不變；只有繞 O 的半周旋轉才同時保持兩者不變。
- 只證明四邊相等。這樣只得到菱形；你還需要一個直角（或對角線相等）。

STEP 之外

我們用過的切線公式 $qx + py = 2$ 和 $px - qy = 2$，都是以下一般法則的例子：圓錐曲線（conic）$\mathbf{x}^\mathsf{T} A \mathbf{x} = c$ 在 $\mathbf{p}$ 的切線是 $\mathbf{p}^\mathsf{T} A \mathbf{x} = c$。在大學一年級關於二次型（quadratic form）的課程中，你會學到如何用旋轉把 A 對角化（diagonalise），這正是 $xy = 1$ 和

$x^2 - y^2 = 2$ 其實是同一條曲線轉了 45° 的原因。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra* 清楚地講解了二次型和旋轉，而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 則有更多 STEP 風格的坐標幾何題目。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。