詳細解答

STEP II 2000，第 9 題

力學 • 有空氣阻力的運動

STEP II 2000，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

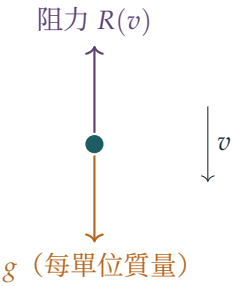
step.maths.org/questions/00-s2-q9

關鍵思路

每位跳傘者都遵從牛頓第二定律（Newton's second law），而阻力只取決於速率，因此我們得到一條關於 v 和 t 的一階微分方程（first-order differential equation），而且可以分離變數（separation of variables）。「速率永遠達不到」這類結果源自終端速率（terminal speed）：即阻力剛好與重力平衡時的速率。解會慢慢向它靠近，但在有限時間內永遠到不了。至於 Karen，只要用無因次（dimensionless）速率 $u = kv/g$ 來表示，那個二次式便可以乾淨俐落地因式分解。

解答

我們把每位跳傘者看成一個由靜止開始垂直下落的質點（particle），重力加速度 g 為常數，方向向下。取 $v \geq 0$ 為向下的速率，並由起跳一刻開始量度 t。以每單位質量計，所受的力是向下的重力 g 和向上的空氣阻力（air resistance），所以由牛頓第二定律得 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g -$ (每單位質量的阻力)。



Jane 的速率上界

Jane 的運動方程（equation of motion）是

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - kv = k\Big(\frac{g}{k} - v\Big).$$

起初 $v = 0 < g/k$。只要 $v < g/k$，我們便可以除以 $g/k - v > 0$，然後分離變數：

$$\int_0^v \frac{\mathrm{d}w}{g/k - w} = \int_0^t k\,\mathrm{d}s \quad\Longrightarrow\quad -\ln\Big(1 - \frac{kv}{g}\Big) = kt,$$

所以

$$v = \frac{g}{k}(1 - \mathrm{e}^{-kt}).$$

這個解對所有 $t \geq 0$ 都成立，因為對任何有限的 t，右邊都小於 g/k，而這正是我們做除法時所用的條件。由於 $\mathrm{e}^{-kt} > 0$，對所有 t 都有 $v < g/k$。所以當 $t \to \infty$ 時，Jane 的速率趨向 g/k，但永遠達不到這個值。

Karen 的速率上界

Karen 的運動方程是

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - kv - \frac{2k^2}{g}v^2.$$

設 $u = kv/g$，這是一個無因次的速率。於是右邊變成

$$g(1 - u - 2u^2) = g(1 - 2u)(1 + u), \qquad \text{及} \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{k}{g}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = k(1 - 2u)(1 + u).$$

當 $u = \frac{1}{2}$ 時加速度為零（另一個根 $u = -1$ 並不是物理上合理的速率），即 $v = g/(2k)$。這就是 Karen 的終端速率。

起初 $u = 0 < \frac{1}{2}$。只要 $0 \leq u < \frac{1}{2}$，兩個因式都是正數，所以可以分離變數。化成部分分式（partial fractions），

$$\frac{1}{(1 - 2u)(1 + u)} = \frac{2/3}{1 - 2u} + \frac{1/3}{1 + u},$$

這可以在 $1 = A(1 + u) + B(1 - 2u)$ 中代入 $u = -1$ 和 $u = \frac{1}{2}$ 來驗證。因此

$$kt = \int_0^u \Big(\frac{2/3}{1 - 2w} + \frac{1/3}{1 + w}\Big)\mathrm{d}w = \frac{1}{3}\Big[-\ln(1 - 2w) + \ln(1 + w)\Big]_0^u = \frac{1}{3}\ln\frac{1 + u}{1 - 2u}.$$

把 $\dfrac{1 + u}{1 - 2u} = \mathrm{e}^{3kt}$ 重新整理，得

$$u = \frac{\mathrm{e}^{3kt} - 1}{2\mathrm{e}^{3kt} + 1} = \frac{1}{2} - \frac{3/2}{2\mathrm{e}^{3kt} + 1} < \frac{1}{2}.$$

基於與之前相同的理由，這個解對所有 $t \geq 0$ 都成立，所以 Karen 的速率滿足

$$v < \frac{g}{2k} \quad \text{對所有} t.$$

這就是對應的結果：她的速率趨近 $g/(2k)$，但永遠達不到這個值。

Jane 達到 $g/(3k)$ 所需的時間

在 Jane 的解中令 $v = g/(3k)$，得 $1 - \mathrm{e}^{-kt} = \frac{1}{3}$，所以 $\mathrm{e}^{-kt} = \frac{2}{3}$，而

$$t = \frac{1}{k} \ln \frac{3}{2},$$

正如題目所求。

Karen 達到 $g/(3k)$ 所需的時間

> **想一想** 我們需要以 t 表示 u 的公式嗎？還是有更快的途徑？

更快的途徑是利用以 u 表示 t 的公式，而這個公式我們已經有了。速率為 $g/(3k)$ 即 $u = \frac{1}{3}$，它小於 $\frac{1}{2}$，所以她確實會達到這個速率。於是

$$\frac{1+u}{1-2u} = \frac{4/3}{1/3} = 4, \qquad \text{所以} \qquad t = \frac{1}{3k} \ln 4 = \frac{2}{3k} \ln 2.$$

驗算

- 在任何正的速率下，Karen 所受的阻力都比 Jane 大，所以她應該要用更長時間才達到相同的速率。果然，$\frac{2}{3} \ln 2 \approx 0.462$ 大於 $\ln \frac{3}{2} \approx 0.405$。
- 當 t 很小時，兩條公式都給出 $v \approx gt$，即沒有阻力的自由下落（free fall），這正是應有的結果。把 $u = (\mathrm{e}^{3kt} - 1)/(2\mathrm{e}^{3kt} + 1) \approx 3kt/3 = kt$ 展開，便得 $v \approx gt$。
- 我們由靜止開始，用數值方法逐步求解兩條方程（龍格－庫塔法（Runge–Kutta），取 $g = 9.8$，$k = 0.7$）。速率一直保持在 14 和 7 以下，這兩個數正是 g/k 和 $g/(2k)$；而速率 $g/(3k)$ 分別在 $t \approx 0.5792$ 和 $t \approx 0.6601$ 時達到。這些數值與 $k^{-1} \ln \frac{3}{2}$ 和 $\frac{2}{3k} \ln 2$ 相符，誤差約為 10^{-9}。

常見錯誤

- 單憑加速度為正便斷言「速率永遠達不到 g/k」。這只說明速率在增加，卻不能說明它一直低於 g/k。你需要明確的解，或者論證達到終端速率所需的時間是無限的。
- 弄錯 $\ln(1-2u)$ 一項的正負號。對 $\frac{1}{1-2u}$ 積分，得 $-\frac{1}{2} \ln(1-2u)$。

STEP 之外

兩條方程都是自治（autonomous）方程：$\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = f(v)$。終端速率是這類方程的穩定平衡點（stable equilibrium）。常微分方程（ODE）的唯一性定理（uniqueness theorem）表

明，當 f 光滑時，解永遠不能在有限時間內到達平衡點，這就是兩個上界背後的一般原因。Karen 的方程是一條里卡蒂方程（Riccati equation），而同樣的邏輯斯蒂型（logistic-type）行為亦見於人口模型。Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations* 涵蓋自治方程及其平衡點，而 Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics* 則討論有阻力的運動。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。