詳細解答

# STEP II 2000，第 8 題

純數學 • 可分離變量微分方程

**STEP II 2000，第 8 題**

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/00-s2-q8

## 關鍵思路

兩條方程都是可分離變數（separable）的：含 $x$ 的部分與含 $y$ 的部分以乘積形式出現，所以可以把所有涉及 $y$ 的項放在一邊，所有涉及 $x$ 的項放在另一邊。兩題中 $x$ 的一邊都具有 $x\,\mathrm{e}^{ax^2}$ 的形式，由於 $x$ 是 $x^2$ 的導數（derivative）（的倍數），所以可以立即積分。在第 (ii) 部分，$(y+3)$ 的冪次由我們自行選擇，而我們選擇的冪次要令 $y$ 的增長恰好與 $\mathrm{e}^{3x^2}$ 相符。

## 解答

### 第 (i) 部分

由於在 $x=0$ 時 $y=6$，起初附近有 $y+3>0$，因此可以除以 $(y+3)^{1/2}$：

$$(y+3)^{-1/2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -4x\,\mathrm{e}^{-x^2}.$$

兩邊對 $x$ 積分，並利用 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{-x^2} = -2x\,\mathrm{e}^{-x^2}$，得

$$2(y+3)^{1/2} = 2\mathrm{e}^{-x^2} + C.$$

代入 $x=0$、$y=6$ 得 $2\cdot 3 = 2 + C$，所以 $C=4$，而

$$(y+3)^{1/2} = \mathrm{e}^{-x^2} + 2.$$

右邊恆不小於 2，所以它確實是一個合理的（正）平方根，而且 $y+3$ 永遠不會達到 0；因此上面的除法對所有 $x \geq 0$ 都成立。兩邊平方，得

$$\boxed{y = (2+\mathrm{e}^{-x^2})^2 - 3 = 1 + 4\mathrm{e}^{-x^2} + \mathrm{e}^{-2x^2}}.$$

當 $x \to \infty$ 時，$\mathrm{e}^{-x^2} \to 0$ 且 $\mathrm{e}^{-2x^2} \to 0$，所以 $y \to 1$，正如題目所求。

**第 (ii) 部分**

這裏的方程是

$$(y+3)^{k-1}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\,\mathrm{e}^{6x^2}.$$

要令一般的（可能不是整數的）冪次有意義，我們需要 $y+3>0$；又由於當 $x>0$ 時 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}>0$，$y$ 是遞增的，所以只要 $y+3$ 起初是正數，它就會一直保持正數。當 $k\neq 0$ 時，積分得

$$\frac{(y+3)^k}{k} = \frac{\mathrm{e}^{6x^2}}{12} + C, \qquad \text{所以} \qquad (y+3)^k = \frac{k}{12}\,\mathrm{e}^{6x^2} + kC.$$

**想一想** 我們應該嘗試哪一個 $k$？

若 $k>0$，則當 $x$ 很大時，常數可以忽略，於是 $y+3\approx (k/12)^{1/k}\,\mathrm{e}^{6x^2/k}$。我們希望 $y$ 的增長與 $\mathrm{e}^{3x^2}$ 相若，所以需要 $6/k=3$，即 $k=2$。（任何其他 $k>0$ 都會令 $\mathrm{e}^{-3x^2}y$ 趨向 0 或趨向 $\infty$。）

因此取 $k=2$。這時方程是 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\,\mathrm{e}^{6x^2}/(y+3)$，其解為

$$(y+3)^2 = \frac{\mathrm{e}^{6x^2}}{6} + D,$$

其中 $D=(y_0+3)^2-\frac{1}{6}$，而 $y_0$ 是 $y$ 在 $x=0$ 時的值。右邊由 $(y_0+3)^2>0$ 開始遞增，所以一直保持正數，而解對每一個 $x\geq 0$ 都存在：

$$y = \sqrt{\tfrac{1}{6}\mathrm{e}^{6x^2}+D}\; - 3.$$

乘以 $\mathrm{e}^{-3x^2}$，並把 $\mathrm{e}^{-3x^2}=\sqrt{\mathrm{e}^{-6x^2}}$ 放入根號內，得

$$\mathrm{e}^{-3x^2}y = \sqrt{\tfrac{1}{6}+D\,\mathrm{e}^{-6x^2}}\; - \; 3\mathrm{e}^{-3x^2} \longrightarrow \sqrt{\tfrac{1}{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

當 $x\to\infty$ 時成立，因為兩個指數項都趨向 0。所以當 $k=2$ 時，極限（limit）是

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\mathrm{e}^{-3x^2}y = \frac{1}{\sqrt{6}}},$$

不論初始值是甚麼：常數 $D$ 已從答案中消失，這正是題目可以說「任何解」的原因。

當 $k=2$ 時，冪 $(y+3)^{-1}$ 對 $y<-3$ 也有意義。在該分支上 $y+3=-\sqrt{\frac{1}{6}\mathrm{e}^{6x^2}+D}$，而同樣的論證給出極限 $-1/\sqrt{6}$。題目預期的答案是 $1/\sqrt{6}$，對應 $y>-3$ 的解。

## 驗算

- 在 (i) 中，$x=0$ 給出 $y=(2+1)^2-3=6$，而對 $y=(2+\mathrm{e}^{-x^2})^2-3$ 求導得 $-4x\mathrm{e}^{-x^2}(2+\mathrm{e}^{-x^2}) = -4x\mathrm{e}^{-x^2}(y+3)^{1/2}$。

- 以數值方法（龍格－庫塔法，Runge–Kutta）逐步求解兩條方程，結果與公式吻合；例如在 (i) 中 $y(2) \approx 1.07360$，而在 (ii) 中，由 $y_0 = 6$ 開始，$\mathrm{e}^{-12}y(2) \approx 0.408230$，已經很接近 $1/\sqrt{6} \approx 0.408248$。

## 常見錯誤

- 到平方之後才記起要加積分常數（constant of integration），或者把 $y = 6$ 代入了錯誤的式子。
- 把 $x\,\mathrm{e}^{6x^2}$ 積分成 $\mathrm{e}^{6x^2}/6$ 而不是 $\mathrm{e}^{6x^2}/12$；這不會改變 $k$，但會改變極限。

## STEP 之外

第 (ii) 部分是漸近分析（asymptotic analysis）的一個小例子：我們無須理會初始值，就找出了解在 $x$ 很大時的表現，因為積分常數被不斷增長的項所淹沒。探究解的哪些特徵與初始條件（initial conditions）無關，正是微分方程（differential equations）定性理論的核心問題。Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（微分方程入門教科書）涵蓋可分離變數方程以及這類長期表現的討論。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。