詳細解答

STEP II 2000，第 7 題

純數學 • 直線與圓錐

> **STEP II 2000，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/00-s2-q7

關鍵思路

動手做任何事之前，先求出 $\mathbf{s}$ 的長度。$\cos\theta \pm \sqrt{3}$ 這些項是刻意安排的：交叉項會互相抵消，並出現 $\cos^2\theta + \sin^2\theta$，所以 $|\mathbf{s}|$ 完全與 θ 無關。之後的一切都來自純量積（scalar product）。$s_x - s_z$ 這個組合同樣不含 θ，這直接指出了 m 的方向，也解釋了為何最後一部分會出現平面 $x - z =$ 常數。

解答

l 與一般直線的夾角

為簡便起見，記 $c_\theta = \cos\theta$。$\mathbf{s}$ 的長度為

$$\begin{aligned}|\mathbf{s}|^2 &= (c_\theta + \sqrt{3})^2 + 2\sin^2\theta + (c_\theta - \sqrt{3})^2 \\ &= 2c_\theta^2 + 6 + 2\sin^2\theta = 8,\end{aligned}$$

因為交叉項 $\pm 2\sqrt{3}\,c_\theta$ 互相抵消。所以對任何 θ，都有 $|\mathbf{s}| = 2\sqrt{2}$。

設 $\mathbf{d} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$。則

$$\mathbf{s}\cdot\mathbf{d} = a(c_\theta + \sqrt{3}) + \sqrt{2}\,b\sin\theta + c(c_\theta - \sqrt{3}) = (a+c)\cos\theta + \sqrt{2}\,b\sin\theta + \sqrt{3}\,(a-c).$$

因此兩條直線的夾角 ϕ 滿足

$$\cos\phi = \frac{(a+c)\cos\theta + \sqrt{2}\,b\sin\theta + \sqrt{3}\,(a-c)}{2\sqrt{2}\,\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

直線本身沒有指定的方向，所以如果你要的是銳角（acute angle），就取右邊的絕對值（modulus）。

直線 m

我們要找一個方向 $\mathbf{d}$，使 $\cos\phi$ 與 θ 無關。觀察分子可知，恰好當 $a+c=0$ 且 $b=0$ 時，對 θ 的依賴便會消失。所以試取 $\mathbf{d}=\mathbf{i}-\mathbf{k}$（$a=1$，$b=0$，$c=-1$）：

$$\cos\phi=\frac{\sqrt{3}\cdot 2}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

這個值是正數，所以 ϕ 本身已是銳角，而且對任何 θ 都有 $\phi=\pi/6$。因此，通過原點的直線

$$m:\quad \mathbf{r}=\mu(\mathbf{i}-\mathbf{k})$$

符合要求。當 θ 變化時，l 掃出一個圓錐（cone），其軸為 m，半頂角（semi-vertical angle）為 $\pi/6$。

P 描出的圓

在 l 上，$x-z=\lambda(s_x-s_z)=\lambda((c_\theta+\sqrt{3})-(c_\theta-\sqrt{3}))=2\sqrt{3}\lambda$。令此式等於 $4\sqrt{3}$，便得 $\lambda=2$，不論 θ 是甚麼，所以

$$\overrightarrow{OP}=2\mathbf{s}=(2\cos\theta+2\sqrt{3})\,\mathbf{i}+2\sqrt{2}\sin\theta\,\mathbf{j}+(2\cos\theta-2\sqrt{3})\,\mathbf{k}.$$

直線 m 與該平面相交於 $\mu-(-\mu)=4\sqrt{3}$ 之處，即 $\mu=2\sqrt{3}$，交點為 C，其中

$$\overrightarrow{OC}=2\sqrt{3}\,\mathbf{i}-2\sqrt{3}\,\mathbf{k}.$$

? **想一想** 為甚麼 C 是圓心的自然人選？

平面 $x-z=4\sqrt{3}$ 的法線（normal）是 $\mathbf{i}-\mathbf{k}$，正是 m 的方向。所以 m 是圓錐的軸，它垂直於該平面，而任何圓錐被垂直於其軸的平面所截，都會得到一個圓，圓心就在軸與該平面相交之處。現在我們直接驗證這一點：

$$\overrightarrow{CP}=2\cos\theta\,\mathbf{i}+2\sqrt{2}\sin\theta\,\mathbf{j}+2\cos\theta\,\mathbf{k},\qquad |\overrightarrow{CP}|^2=4\cos^2\theta+8\sin^2\theta+4\cos^2\theta=8.$$

所以 P 的每一個位置都在該平面上，並且與平面上的定點 C 相距 $2\sqrt{2}$。換句話說，P 位於該平面上以 C 為圓心、半徑為 $2\sqrt{2}$ 的圓上，而 C 在 m 上。

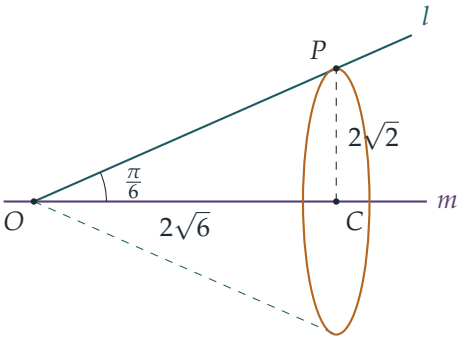
要看出 P 確實描出整個圓，可寫成

$$\overrightarrow{CP}=2\sqrt{2}\,(\cos\theta\,\mathbf{u}+\sin\theta\,\mathbf{v}),\qquad \mathbf{u}=\tfrac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i}+\mathbf{k}),\quad \mathbf{v}=\mathbf{j}.$$

這裏 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 是互相垂直的單位向量（unit vector），兩者都垂直於 $\mathbf{i}-\mathbf{k}$，所以它們都平行於該平面。當 θ 由 0 變到 2π 時，P 沿圓走了剛好一圈。半徑為

$$\boxed{2\sqrt{2}}.$$

求半徑還有一個較快的方法：$|OP| = 2|\mathbf{s}| = 4\sqrt{2}$ 而 $|OC| = 2\sqrt{6}$，且 OC 垂直於該平面，所以由畢氏定理（Pythagoras）得 $CP = \sqrt{32-24} = 2\sqrt{2}$。等價地，$CP = OC\tan\frac{\pi}{6} = 2\sqrt{6}/\sqrt{3}$。



驗算

- 當 $\theta = 0$ 時，$\mathbf{s} = (1+\sqrt{3}, 0, 1-\sqrt{3})$，其中 $|\mathbf{s}|^2 = (4+2\sqrt{3}) + (4-2\sqrt{3}) = 8$，而 $\mathbf{s}\cdot(\mathbf{i}-\mathbf{k}) = 2\sqrt{3}$，得 $\cos\phi = \sqrt{3}/2$。
- 求半徑的兩種方法結果一致：$\sqrt{(4\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{6})^2} = \sqrt{8}$ 及 $2\sqrt{6}\tan\frac{\pi}{6} = \sqrt{8} \approx 2.828$。
- 數值上，取 20 000 個隨機的 θ（一般公式則另取隨機的 a, b, c），與 m 的夾角等於 $\pi/6$，P 在該平面上，且 $|CP| = 2.8284\ldots$，誤差全部在 10^{-15} 以內。

常見錯誤

- 忘記除以 $|\mathbf{s}|$，或假設 $\mathbf{s}$ 是單位向量。它的長度是 $2\sqrt{2}$。
- 只證明了 P 在以 O 為球心的球面（sphere）上（即 $|OP| = 4\sqrt{2}$）。球面被平面所截固然得到一個圓，但你仍須說明為何圓心是 m 上的 C：這是因為 OC 垂直於該平面。

STEP 之外

直線 l 掃出一個圓錐，而用平面去截圓錐，正是圓錐曲線（conic sections）名稱的由來。垂直於軸的平面截出一個圓；把平面傾斜，便會得到橢圓（ellipse）、拋物線（parabola）或雙曲線（hyperbola）。在大學一年級的課程中，你會把圓錐描述為二次曲面（quadric surface）$(\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{n}})^2 = |\mathbf{r}|^2\cos^2\alpha$，並利用對稱矩陣（symmetric matrix）的特徵值（eigenvalues）為這類曲面分類。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門）涵蓋

了這方面的內容。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。