詳細解答

STEP II 2000，第 6 題

純數學 • 半角代換

> **STEP II 2000，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/00-s2-q6

關鍵思路

代換（substitution）$t = \tan\frac{1}{2}\theta$ 可以把任何由 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 組成的有理函數（rational function）化為 t 的有理函數，而在這一題，結果是 2 除以一個二次式。配方（completing the square）之後得到反正切（arctangent），而第一部分的第三個恆等式（identity）正好用來化簡上限處的反正切。第二個積分則可憑對稱性（symmetry）由第一個積分直接得出，毋須再做新的積分。

解答

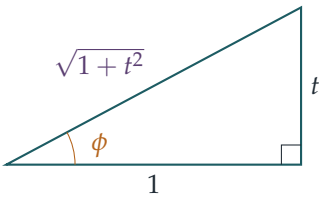
三個恆等式

設 $\phi = \frac{1}{2}\theta$，則 $t = \tan\phi$ 且 $1 + t^2 = \sec^2\phi$。由二倍角公式（double-angle formulae），

$$\sin\theta = 2\sin\phi\cos\phi = 2\tan\phi\cos^2\phi = \frac{2\tan\phi}{\sec^2\phi} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos\theta = \cos^2\phi - \sin^2\phi = \cos^2\phi\,(1 - \tan^2\phi) = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

（只要 $\tan\frac{1}{2}\theta$ 有定義，即 $\cos\frac{1}{2}\theta \neq 0$，這兩條式子便成立。）下圖的直角三角形，兩條直角邊分別為 1 和 t，夾角為 ϕ，是記住這兩條公式的好方法。



至於第三個恆等式，當 $\sin\theta \neq 0$ 時，利用 $1+\cos\theta = 2\cos^2\phi$ 和 $\sin\theta = 2\sin\phi\cos\phi$：

$$\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{2\cos^2\phi}{2\sin\phi\cos\phi} = \cot\phi = \tan(\tfrac{1}{2}\pi - \phi) = \tan(\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\theta),$$

因為對餘角（complementary angles）而言，$\cot\phi = \tan(\frac{1}{2}\pi - \phi)$。至此三個恆等式均已證明。

第一個積分

設 $t = \tan\frac{1}{2}\theta$，則 $\theta = 2\arctan t$，所以

$$\mathrm{d}\theta = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

當 $\theta = 0$ 時，$t = 0$；當 $\theta = \frac{1}{2}\pi$ 時，$t = \tan\frac{1}{4}\pi = 1$。設 $c = \cos\alpha$ 和 $s = \sin\alpha$；由於 $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$，兩者皆為正數。於是

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+c\sin\theta} = \int_0^1 \frac{1}{1+\dfrac{2ct}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{2}{t^2+2ct+1}\,\mathrm{d}t.$$

配方，並利用 $1-c^2 = s^2$，得

$$t^2 + 2ct + 1 = (t+c)^2 + s^2.$$

由於 $s > 0$，由標準積分 $\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+s^2} = \frac{1}{s}\arctan\frac{u}{s}$ 可得

$$\int_0^1 \frac{2}{(t+c)^2+s^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{s}\Big[\arctan\frac{t+c}{s}\Big]_0^1 = \frac{2}{s}\left(\arctan\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} - \arctan\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right).$$

想一想 怎樣化簡 $\arctan\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$？

第一部分的功夫在這裏派上用場。由第三個恆等式（以 α 代替 θ），$\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \tan(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\alpha)$。不過，在把 arctan 與 tan 互相抵消之前，必須先檢查這個角是否位於 arctan 的值域（range）$(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ 之內。由於 $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$，我們有 $\frac{1}{4}\pi < \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\alpha < \frac{1}{2}\pi$，所以確實有

$$\arctan\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\alpha.$$

同理，$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \cot\alpha = \tan(\frac{1}{2}\pi - \alpha)$，而 $0 < \frac{1}{2}\pi - \alpha < \frac{1}{2}\pi$，所以 $\arctan\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{2}\pi - \alpha$。因此

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+\cos\alpha\sin\theta} = \frac{2}{\sin\alpha}\Big((\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\alpha) - (\tfrac{1}{2}\pi - \alpha)\Big) = \frac{2}{\sin\alpha}\cdot\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{\sin\alpha},$$

此即所求。

第二個積分

代入 $\theta = \frac{1}{2}\pi - u$。於是 $\cos\theta = \sin u$，$\mathrm{d}\theta = -\mathrm{d}u$，而上下限 $0, \frac{1}{2}\pi$ 互換，剛好抵消負號：

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+\sin\alpha\cos\theta} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}u}{1+\sin\alpha\sin u}.$$

現在設 $\beta = \frac{1}{2}\pi - \alpha$。於是 $\sin\alpha = \cos\beta$，且 $0 < \beta < \frac{1}{2}\pi$，所以剛才證明的結果可以套用，只需以 β 代替 α：

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}u}{1+\cos\beta\sin u} = \frac{\beta}{\sin\beta}.$$

由於 $\sin\beta = \cos\alpha$，我們得出結論：對於 $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$，

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+\sin\alpha\cos\theta} = \frac{\frac{1}{2}\pi - \alpha}{\cos\alpha}.$$

驗算

- 當 $\alpha \to 0$ 時，$\cos\alpha \to 1$，第一個積分應趨向 $\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+\sin\theta} = 1$（作代換後得 $\int_0^1 \frac{2}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = 1$）；而 $\alpha/\sin\alpha \to 1$，果然吻合。
- 當 $\alpha \to \frac{1}{2}\pi$ 時，被積函數（integrand）趨向 1，所以第一個積分應趨向 $\frac{1}{2}\pi$，與 $\frac{\pi/2}{1}$ 相符。同樣，當 $\alpha \to \frac{1}{2}\pi$ 時，第二個積分趨向 1，與 $\frac{\frac{1}{2}\pi-\alpha}{\cos\alpha} \to 1$ 一致。
- 數值上，當 $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ 時，用辛普森法則（Simpson's rule）算得第一個積分為 1.110721，與 $\frac{\pi\sqrt{2}}{4} \approx 1.110721$ 相符；當 $\alpha = \frac{1}{3}\pi$ 時，第二個積分算得 $1.047198 \approx \frac{1}{3}\pi$，正如公式所預測。

常見錯誤

- 忘記 $\mathrm{d}\theta$ 所帶來的因子 $\frac{2}{1+t^2}$，或忘記把上下限改為 0 和 1。
- 未檢查 x 是否位於 $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ 之內，便寫下 $\arctan(\tan x) = x$；在這一題，正是限制條件 $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$ 令這一步成立。
- 為第二個積分把整個積分過程重做一遍，而不利用 $\theta \mapsto \frac{1}{2}\pi - \theta$ 和 $\alpha \mapsto \frac{1}{2}\pi - \alpha$。

STEP 之外

代換 $t = \tan\frac{1}{2}\theta$（有時稱為魏爾斯特拉斯代換，Weierstrass substitution）之所以行得通，是因為點 $(\cos\theta, \sin\theta) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$ 是單位圓的一個有理參數化（rational parametrisation）；取 t 為有理數，便可得出所有畢氏三元數組（Pythagorean triple）。在大學裏，

形如 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$ 的積分，通常改為設 $z = e^{i\theta}$ 並運用留數定理（residue theorem）來計算，這樣就把問題轉化為找出單位圓內的極點（poles）。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《複分析：可視化方法》）是這個想法的一本精彩入門書。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。