詳細解答

STEP II 2000，第 4 題

純數學 • 輻角與反正切恆等式

> **STEP II 2000，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/00-s2-q4

關鍵思路

頭兩個結果說明：複數（complex number）相乘時，它們的輻角（argument）相加。因此，形如「若干個反正切（arctangent）之和 $= \pi/4$」的恆等式，其實是關於 $5-\mathrm{i}$ 和 $1+\mathrm{i}$ 這類高斯整數（Gaussian integer）之乘積的命題：每個滿足 $a>0$ 的因子 $a+b\mathrm{i}$ 貢獻一個角 $\arctan(b/a)$，而直線 $y=x$ 上任何一點的輻角都是 $\pi/4$。要做的工作是小心地把乘積展開，然後驗證兩個角確實相等，而不僅僅是相差 2π 的某個倍數。

解答

乘積公式與棣美弗定理

展開並利用 $\mathrm{i}^2=-1$，得

$$\begin{aligned}(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)(\cos\phi+\mathrm{i}\sin\phi) &= (\cos\theta\cos\phi-\sin\theta\sin\phi)+\mathrm{i}(\sin\theta\cos\phi+\cos\theta\sin\phi)\\ &= \cos(\theta+\phi)+\mathrm{i}\sin(\theta+\phi),\end{aligned}$$

其中用到 $\cos(A+B)$ 和 $\sin(A+B)$ 的複角公式（compound-angle formulae）。

第二個結果（即棣美弗定理，de Moivre's theorem）我們對 n 用數學歸納法（induction）證明。當 $n=1$ 時，兩邊都是 $\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$。假設結果對 $n=k$ 成立，則

$$\begin{aligned}(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^{k+1} &= (\cos k\theta+\mathrm{i}\sin k\theta)(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)\\ &= \cos(k\theta+\theta)+\mathrm{i}\sin(k\theta+\theta),\end{aligned}$$

這裏先用歸納假設（induction hypothesis），再用取 $\phi=k\theta$ 的乘積公式。所以結果對 $n=k+1$ 成立，因而對每個正整數 n 都成立。

為方便起見，我們把 $\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ 記作 $\operatorname{cis}\theta$。於是我們已證明 $\operatorname{cis}\theta\operatorname{cis}\phi = \operatorname{cis}(\theta+\phi)$ 和 $(\operatorname{cis}\theta)^n = \operatorname{cis} n\theta$。

關於角的一個事實

若 $a > 0$ 而 b 為實數，則

$$a + b\mathrm{i} = \sqrt{a^2+b^2}\,\operatorname{cis}(\arctan(b/a)),$$

這是因為角 $\alpha = \arctan(b/a)$ 位於 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 之內，所以 $\cos\alpha > 0$，而且 $\tan\alpha = b/a$；這兩個條件決定了 $\cos\alpha = a/\sqrt{a^2+b^2}$ 及 $\sin\alpha = b/\sqrt{a^2+b^2}$。

此外，若 $R\operatorname{cis}S = R'\operatorname{cis}T$ 且 $R, R' > 0$，則取模（modulus）可得 $R = R'$，所以 $\cos S = \cos T$ 及 $\sin S = \sin T$，因此 $S - T$ 是 2π 的倍數。

第一個恆等式

設 $\alpha = \arctan\frac{1}{5}$。則 $5 - \mathrm{i} = \sqrt{26}\operatorname{cis}(-\alpha)$ 及 $1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$，所以由上面的結果得

$$(5-\mathrm{i})^2(1+\mathrm{i}) = 26\sqrt{2}\,\operatorname{cis}(\tfrac{\pi}{4} - 2\alpha).$$

另一方面，直接展開可得

$$(5-\mathrm{i})^2 = 24 - 10\mathrm{i}, \qquad (24-10\mathrm{i})(1+\mathrm{i}) = 24 + 24\mathrm{i} - 10\mathrm{i} + 10 = 34 + 14\mathrm{i},$$

而 $34 + 14\mathrm{i} = \sqrt{1352}\operatorname{cis}\beta$，其中 $\beta = \arctan\frac{14}{34} = \arctan\frac{7}{17}$。兩相比較，$\frac{\pi}{4} - 2\alpha$ 與 β 相差 2π 的某個倍數。

> **想一想** 我們怎樣知道這個 2π 的倍數是零？

我們把兩個角的範圍都確定下來。由於 $0 < \frac{1}{5} < 1$，我們有 $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$，所以 $-\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4} - 2\alpha < \frac{\pi}{4}$。另外 $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$。$(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ 內的兩個角相差必定小於 2π，所以該倍數是零，即 $\beta = \frac{\pi}{4} - 2\alpha$。也就是說，

$$\arctan\tfrac{7}{17} + 2\arctan\tfrac{1}{5} = \frac{\pi}{4},$$

這正是所要證明的。

第二個恆等式

同樣的想法提示我們考慮 $(4+\mathrm{i})^3(20+\mathrm{i})(1985+\mathrm{i})$，它的輻角應該就是等式的左邊。逐步相乘：

$$(4+\mathrm{i})^2 = 15 + 8\mathrm{i},$$
$$(4+\mathrm{i})^3 = (15+8\mathrm{i})(4+\mathrm{i}) = 52 + 47\mathrm{i},$$
$$(4+\mathrm{i})^3(20+\mathrm{i}) = (52+47\mathrm{i})(20+\mathrm{i}) = 993 + 992\mathrm{i}.$$

這已經非常接近直線 $y = x$，而最後一個因子正好完成餘下的工作：

$$\begin{aligned}(993 + 992\mathrm{i})(1985 + \mathrm{i}) &= (993 \times 1985 - 992) + (993 + 992 \times 1985)\mathrm{i} \\ &= 1970113 + 1970113\,\mathrm{i} = 1970113\sqrt{2}\ \mathrm{cis}\ \tfrac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

（如果你好奇 1985 從何而來：要求 $(993 + 992\mathrm{i})(a + \mathrm{i})$ 的實部與虛部相等，便得 $993a - 992 = 992a + 993$，所以 $a = 1985$。）

現在設 $p = \arctan\frac{1}{4}$、$q = \arctan\frac{1}{20}$ 及 $r = \arctan\frac{1}{1985}$。根據上面關於角的事實，$4 + \mathrm{i}$、$20 + \mathrm{i}$、$1985 + \mathrm{i}$ 分別是 $\mathrm{cis}\,p$、$\mathrm{cis}\,q$、$\mathrm{cis}\,r$ 的正實數倍，所以它們的乘積是 $\mathrm{cis}(3p + q + r)$ 的正實數倍。與上一行比較，$3p + q + r - \frac{\pi}{4}$ 是 2π 的倍數。

p, q, r 各自位於 $(0, \frac{\pi}{4})$ 之內，因為它們的正切值都位於 $(0, 1)$ 之內，所以 $0 < 3p + q + r < \frac{5\pi}{4}$。因此 $3p + q + r$ 與 $\frac{\pi}{4}$ 相差小於 2π，該倍數是零，於是

$$3\arctan\tfrac{1}{4} + \arctan\tfrac{1}{20} + \arctan\tfrac{1}{1985} = \frac{\pi}{4}.$$

驗算

模必須吻合：$|34 + 14\mathrm{i}|^2 = 1156 + 196 = 1352 = 26^2 \times 2$，正如所料。至於第二個乘積，$17^3 \times 401 \times (1985^2 + 1)$ 應該等於 2×1970113^2，而事實確是如此。在數值上，用計算機計算，兩個等式的左邊都等於 $0.785398163\ldots = \pi/4$；例如 $\arctan\frac{7}{17} \approx 0.390607$ 而 $\frac{\pi}{4} - 2\arctan\frac{1}{5} \approx 0.390607$。

常見錯誤

- 由複數相等直接推斷角相等，而沒有排除兩者相差 $2\pi k$ 的可能。關於範圍的論證是證明中不可或缺的一環。
- 計算 $(5 - \mathrm{i})^2$ 時出現正負號錯誤：它等於 $24 - 10\mathrm{i}$，所以 $5 - \mathrm{i}$ 貢獻的是 $-\arctan\frac{1}{5}$，這就是為甚麼該反正切移到另一邊後帶着正號。
- 計算大數乘積時出現算術錯誤；可如上文所述，用模來驗算。

STEP 之外

這類恆等式稱為梅欽類公式（Machin-type formulae）；梅欽（John Machin）的 $\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$ 是用同樣的方法由 $(5 + \mathrm{i})^4(239 - \mathrm{i})$ 得出的，並在 1706 年用來把 π 計算到小數點後一百位。其背後的結構是高斯整數 $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ 的算術，當中分解為高斯質數（Gaussian primes）的唯一分解性（unique factorisation）解釋了哪些這類恆等式有可

能存在。想了解乘法作為旋轉的幾何意義，可閱讀 Needham 的 *Visual Complex Analysis*（以圖像方式講解複分析）；想了解高斯整數，可閱讀 Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（數論入門）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。