詳細解答

STEP II 2000，第 3 題

純數學 • 誤差傳遞

> **STEP II 2000，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/00-s2-q3

關鍵思路

餘弦定理（cosine rule）把 a^2 準確地用 b、c 和 A 表示出來，所以整道題要問的，就是當這三個量各自稍作變動時，a 會怎樣隨之改變。把每個組成部分都按微小量展開至一階（first order），捨去微小量之間的乘積，最後利用 $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$ 開平方。至於取值範圍，留意 η 是若干個獨立誤差的線性組合（linear combination），所以當每一項都取到極端值，而且正負號都取得有利時，它便達到最大。

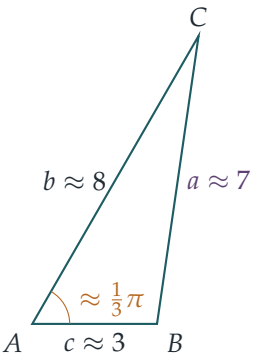
解答

a 的近似式

取未受擾動的數值 $b = 8$、$c = 3$、$A = \frac{1}{3}\pi$，餘弦定理給出

$$a^2 = 64 + 9 - 2 \cdot 8 \cdot 3 \cdot \tfrac{1}{2} = 49,$$

所以 $a = 7$。這就解釋了首項的來歷。



現在加入擾動。以下「≈」一律表示只保留 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ 的一階項，而捨去所有二次或更高次的項，例如 ϵ_1^2 或 $\epsilon_2\epsilon_3$。於是

$$\begin{aligned} b^2 &= 64 + 16\epsilon_1 + \epsilon_1^2 \approx 64 + 16\epsilon_1, \\ c^2 &= 9 + 6\epsilon_2 + \epsilon_2^2 \approx 9 + 6\epsilon_2, \\ bc &= 24 + 3\epsilon_1 + 8\epsilon_2 + \epsilon_1\epsilon_2 \approx 24 + 3\epsilon_1 + 8\epsilon_2. \end{aligned}$$

至於角度，由複角公式（compound-angle formula）和小角近似（small-angle approximation）$\cos\epsilon_3 \approx 1$、$\sin\epsilon_3 \approx \epsilon_3$，可得

$$\cos A = \cos\tfrac{1}{3}\pi\cos\epsilon_3 - \sin\tfrac{1}{3}\pi\sin\epsilon_3 \approx \tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\epsilon_3.$$

（$\cos\epsilon_3 \approx 1$ 的誤差屬於 ϵ_3^2 的數量級，所以在這一階的精確度下確實可以忽略。）把括號乘開，並再次捨去微小量之間的乘積，

$$2bc\cos A \approx 2(24 + 3\epsilon_1 + 8\epsilon_2)\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\epsilon_3\right) \approx 24 + 3\epsilon_1 + 8\epsilon_2 - 24\sqrt{3}\,\epsilon_3.$$

把各部分代入餘弦定理，

$$\begin{aligned} a^2 &\approx (64 + 16\epsilon_1) + (9 + 6\epsilon_2) - (24 + 3\epsilon_1 + 8\epsilon_2 - 24\sqrt{3}\,\epsilon_3) \\ &= 49 + 13\epsilon_1 - 2\epsilon_2 + 24\sqrt{3}\,\epsilon_3. \end{aligned}$$

設 $\delta = 13\epsilon_1 - 2\epsilon_2 + 24\sqrt{3}\,\epsilon_3$，這是一個微小量。由於 $a > 0$，

$$a = \sqrt{49 + \delta} = 7\left(1 + \frac{\delta}{49}\right)^{1/2} \approx 7\left(1 + \frac{\delta}{98}\right) = 7 + \frac{\delta}{14},$$

這裏用了二項式展開（binomial expansion）$(1 + x)^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}x$，適用於微小的 x。因此 $a \approx 7 + \eta$，其中

$$\eta = \frac{13\epsilon_1 - 2\epsilon_2 + 24\sqrt{3}\,\epsilon_3}{14},$$

這正是所求的結果。

想一想 我們能否避免逐項手算這些乘積的展開？

可以：對 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ 求微分，得到 $2a\,\delta a = (2b - 2c\cos A)\,\delta b + (2c - 2b\cos A)\,\delta c + 2bc\sin A\,\delta A$。在 $a = 7$、$b = 8$、$c = 3$、$A = \frac{1}{3}\pi$ 時，上式變成 $14\,\delta a = 13\,\delta b - 2\,\delta c + 24\sqrt{3}\,\delta A$，一行便得出相同的答案。兩種方法其實都只是一階泰勒展開（Taylor expansion）。

η 的取值範圍

試卷上 ϵ_2 的界限印作 $4\cdot 9\times 10^{-2}$，用的是舊式的居中小數點，所以它的意思是 $|\epsilon_2| \le 4.9\times 10^{-2}$。

三個誤差各自獨立地變化，所以由三角不等式（triangle inequality），

$$|\eta| \le \frac{13|\epsilon_1| + 2|\epsilon_2| + 24\sqrt{3}\,|\epsilon_3|}{14} \le \frac{13\times 2\times 10^{-3} + 2\times 4.9\times 10^{-2} + 24\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times 10^{-3}}{14}.$$

分子是 $0.026 + 0.098 + 0.072 = 0.196$，所以

$$|\eta| \le \frac{0.196}{14} = 0.014.$$

這個界限是可以達到的：取 $\epsilon_1 = 2\times 10^{-3}$、$\epsilon_2 = -4.9\times 10^{-2}$、$\epsilon_3 = \sqrt{3}\times 10^{-3}$，便令 η 的每一項都是正數，而且盡可能大，得出 $\eta = 0.014$；把三個正負號全部反過來，則得出 $\eta = -0.014$。由於 η 是各誤差的連續函數（continuous function）（其實更是線性函數），而容許的誤差所組成的集合是一個長方體，所以兩者之間的每一個值也都能取到。因此取值範圍是

$$-0.014 \le \eta \le 0.014,$$

也就是說，a 大約落在 7 ± 0.014 之內。

驗算

- 當所有誤差都是零時，三角形的三邊是 8、3、7，並有一個 60° 的角，而確實有 $64 + 9 - 24 = 49$。
- 取上述的極端誤差，準確的餘弦定理給出 $a \approx 7.0141$ 和 $a \approx 6.9861$，與 7 ± 0.014 非常接近；當中的微小差異來自被捨去的二階項。
- 以數值計算，a 對 A 的偏導數（partial derivative）在基準值處是 $2.9692\ldots = 24\sqrt{3}/14$，與預期相符。

常見錯誤

- 忘記最後要開平方：$a^2 \approx 49 + \delta$ 給出的是 $a \approx 7 + \delta/14$，而不是 $7 + \delta$。
- 求最大值時把三個誤差都取正數：ϵ_2 前面帶負號，所以它必須取負數才能把 η 推高。
- 把 $4 \cdot 9 \times 10^{-2}$ 讀成 36×10^{-2}；對於一條長度為 3 的邊來說，這根本算不上是微小的誤差。

STEP 之外

這就是透過全微分（total differential）進行的誤差傳播（error propagation）：對於多變量函數 f，有 $\delta f \approx \sum (\partial f/\partial x_i)\,\delta x_i$，而最壞的情況是 $\sum |\partial f/\partial x_i|\,|\delta x_i|$。在大學一年級的課程中，這會發展成多變量的泰勒定理（Taylor's theorem），並附有二階餘項（remainder）的明確界限，讓你確切知道「$\approx$」到底有多準確。實驗科學家則往往改用適用於獨立隨機誤差的方和根法則（root-sum-of-squares rule）。Bartle 與 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（實分析入門）對帶餘項的泰勒定理有嚴謹細緻的講解。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。