詳細解答

STEP II 2000，第 2 題

純數學 • 多項式的重根

> **STEP II 2000，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/00-s2-q2

關鍵思路

重複因式（repeated factor）經過求導後仍然保留，只是每求導一次，冪次便減一。因此，四次冪的因式 $(x-a)^4$ 會迫使 p 及其首三階導數（derivative）在 a 處全部等於零。對於這個六次多項式（sextic），三階導數只是一個三次式，它的根給出一張很短的 a 的候選名單。我們逐一檢驗這些候選值，最後才決定 k，因為一求導，k 便會消失。

解答

第一個結果

假設 $(x-a)^2$ 是因式，即對某個多項式（polynomial）q 有 $\mathrm{p}(x)=(x-a)^2\,\mathrm{q}(x)$。由積法則（product rule），

$$\mathrm{p}'(x)=2(x-a)\,\mathrm{q}(x)+(x-a)^2\,\mathrm{q}'(x)=(x-a)[\,2\mathrm{q}(x)+(x-a)\mathrm{q}'(x)\,].$$

代入 $x=a$ 便得 $\mathrm{p}'(a)=0$，正是所求。

相應的結果

同樣的計算適用於任何冪次。若 $\mathrm{f}(x)=(x-a)^m\,\mathrm{g}(x)$，其中 $m\geq 1$，而 g 是多項式，則

$$\mathrm{f}'(x)=(x-a)^{m-1}[\,m\,\mathrm{g}(x)+(x-a)\,\mathrm{g}'(x)\,],$$

而方括號內的式子仍然是多項式。所以若 $(x-a)^m$ 整除 f，則 $(x-a)^{m-1}$ 整除 f'。

現設 $(x-a)^4$ 是 $\mathrm{p}(x)$ 的因式。把上述事實連用三次，

$$(x-a)^3 \text{ 整除} \mathrm{p}'(x),\qquad (x-a)^2 \text{ 整除} \mathrm{p}''(x),\qquad (x-a) \text{ 整除} \mathrm{p}'''(x).$$

再加上 $(x-a)^4$ 整除 $\mathrm{p}(x)$ 本身，代入 $x=a$ 便得

$$\mathrm{p}(a)=\mathrm{p}'(a)=\mathrm{p}''(a)=\mathrm{p}'''(a)=0.$$

求 k

設 $\mathrm{p}(x)=x^6+4x^5-5x^4-40x^3-40x^2+32x+k$。求導三次，

$$\begin{aligned}\mathrm{p}'(x)&=6x^5+20x^4-20x^3-120x^2-80x+32,\\ \mathrm{p}''(x)&=30x^4+80x^3-60x^2-240x-80=10\,(3x^4+8x^3-6x^2-24x-8),\\ \mathrm{p}'''(x)&=120x^3+240x^2-120x-240=120\,(x^3+2x^2-x-2).\end{aligned}$$

想一想 四個條件之中，應該先用哪一個？

先用最容易解的那一個。常數 k 已從 p''' 中消失，而且 p''' 只是三次式，可用分組法因式分解（factorise）：

$$x^3+2x^2-x-2=x^2(x+2)-(x+2)=(x+2)(x-1)(x+1).$$

所以根據相應的結果，a 必定是 -2、1 或 -1。我們把它們逐一代入 p'' 檢驗：

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{10}\mathrm{p}''(1)&=3+8-6-24-8=-27\neq 0,\\ \tfrac{1}{10}\mathrm{p}''(-1)&=3-8-6+24-8=5\neq 0,\\ \tfrac{1}{10}\mathrm{p}''(-2)&=48-64-24+48-8=0.\end{aligned}$$

只有 $a=-2$ 過關。它同樣通過 p' 的檢驗：

$$\mathrm{p}'(-2)=-192+320+160-480+160+32=0.$$

最後，由 $\mathrm{p}(-2)=0$ 便可確定 k：

$$\mathrm{p}(-2)=64-128-80+320-160-64+k=k-48=0,\qquad \text{所以}\qquad \boxed{k=48}.$$

想一想 我們只用了必要條件。怎樣知道當 $k=48$ 時，$(x+2)^4$ 真的是因式？

事實上，$\mathrm{p}(a)=\mathrm{p}'(a)=\mathrm{p}''(a)=\mathrm{p}'''(a)=0$ 這四個條件確實蘊含 $(x-a)^4$ 是因式（由多項式的泰勒定理（Taylor's theorem）可得）。不過，最快捷的確認方法是直接乘開。由於 $(x+2)^4=x^4+8x^3+24x^2+32x+16$，商式必定是首項係數為一（monic）的二次式，其常數項為 $48/16=3$。比較 x^5 的係數，得出 x^2-4x+3，而且確實有

$$(x+2)^4(x^2-4x+3)=x^6+4x^5-5x^4-40x^3-40x^2+32x+48.$$

所以，當 $k = 48$ 時，

$$x^6 + 4x^5 - 5x^4 - 40x^3 - 40x^2 + 32x + 48 = (x+2)^4(x-1)(x-3),$$

而這個因式符合所要求的形式，其中 $a = -2$。

驗算

- 把 $(x+2)^4(x-1)(x-3)$ 完全展開：每個係數都與題目給出的多項式相符，而常數項是 $16 \times 3 = 48$。
- 檢驗係數之和：$\mathrm{p}(1) = 1 + 4 - 5 - 40 - 40 + 32 + 48 = 0$，這是必然的，因為 $(x-1)$ 是因式。
- 我們用電腦在隨機選取的多項式 $(x-a)^4\mathrm{q}(x)$ 上驗證了一般結果，求得 p''' 的根為 $-2, \pm 1$，而 p'' 只在 -2 處等於零，並得出 $k = 48$。

常見錯誤

- 從 $\mathrm{p}(a) = 0$ 或 $\mathrm{p}'(a) = 0$ 入手。這兩個條件牽涉五次式或 k 本身，難以迅速得出結果。應從次數最低的導數開始。
- 找到 p''' 的根便停下來。候選值 $a = \pm 1$ 是 p''' 的根，卻不是 p'' 的根。
- 只把相應的結果寫成「$\mathrm{p}'''(a) = 0$」。應寫出完整的一組條件 $\mathrm{p}(a) = \mathrm{p}'(a) = \mathrm{p}''(a) = \mathrm{p}'''(a) = 0$，並加以證明。

STEP 之外

逆命題（converse）同樣成立：$(x-a)^m$ 整除 p，當且僅當 p 及其首 $m-1$ 階導數在 a 處都等於零。這是因為多項式等於它自身在 a 處的泰勒展開式。在大學一年級的代數課程中，同一想法用來定義根的重數（multiplicity）。它還提供了一個判別重根的方法：用歐幾里得算法（Euclid's algorithm）計算 $\gcd(\mathrm{p}, \mathrm{p}')$。在某些域（field）上，例如模質數的整數，形式導數（formal derivative）會有出人意表的表現。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（環、域與羣）對此有詳細闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。