詳細解答

STEP II 2000，第 11 題

力學 • 彈性繩與簡諧運動

STEP II 2000，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/00-s2-q11

關鍵思路

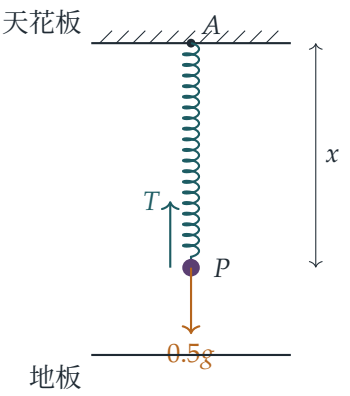
用能量可以很快解決兩個定性的結論：把釋放時儲存的彈性勢能（elastic potential energy），與到達自然長度（natural length）及到達天花板所需的重力勢能作比較。至於時間，則把運動分成兩個階段：彈性繩拉緊時，質點繞其平衡位置（equilibrium position）作簡諧運動（simple harmonic motion）；彈性繩一旦鬆弛，質點便只在重力作用下自由運動。回程就是把上升的過程倒過來走一遍，所以我們把上升所需的時間加倍。

解答

我們把 P 視為繫於一條輕彈性繩上的質點（particle），彈性繩服從胡克定律（Hooke's law），並且沒有空氣阻力。設 x 為 P 在 A 之下的距離，以向下為正，單位為米。當 $x > 1.5$ 時彈性繩拉緊，此時其伸長量（extension）為 $x - 1.5$，張力（tension）為

$$T = \frac{\lambda}{l}(x - 1.5) = \frac{5g}{1.5}(x - 1.5) = \frac{10g}{3}(x - 1.5).$$

房間高 2.5 m，所以 P 由 $x = 2$ 出發，伸長量為 0.5 m。



彈性繩變得鬆弛

釋放時，儲存的彈性勢能為

$$\frac{\lambda e^2}{2l} = \frac{5g\,(0.5)^2}{2(1.5)} = \frac{5g}{12}\,\text{J}.$$

彈性繩要回復到自然長度，P 必須上升 0.5 m，所增加的勢能為 $0.5g \times 0.5 = \frac{g}{4}$ J。由於 $\frac{5g}{12} > \frac{g}{4}$，$P$ 到達 $x = 1.5$ 時仍在向上運動，其動能（kinetic energy）為

$$\tfrac{1}{2}(0.5)v^2 = \frac{5g}{12} - \frac{g}{4} = \frac{g}{6}, \qquad \text{所以} \qquad v^2 = \frac{2g}{3}.$$

因此它會越過彈性繩處於自然長度的那一點，繼續向上，彈性繩於是變得鬆弛。

P 不會到達天花板

要到達天花板，P 須由起點上升 2 m，勢能要增加 $0.5g \times 2 = g$ J。可用的能量就只有釋放時儲存在彈性繩中的 $\frac{5g}{12}$ J（彈性繩一旦鬆弛便不儲存任何能量），而 $\frac{5g}{12} < g$。所以 P 不可能到達天花板。

更準確地說，彈性繩鬆弛之後，P 是一個以速率 v 沿鉛垂方向運動的拋體（projectile），所以它會再上升 $\dfrac{v^2}{2g} = \dfrac{1}{3}$ m。它的最高點位於 $x = 1.5 - \frac{1}{3} = \frac{7}{6}$，仍在天花板之下 $\frac{7}{6}$ m。

彈性繩拉緊時的簡諧運動

當 $x > 1.5$ 時，由牛頓第二定律（Newton's second law）（以向下為正）得

$$0.5\,\ddot{x} = 0.5g - \frac{10g}{3}(x - 1.5).$$

平衡位置就是右邊等於零之處：$x - 1.5 = 0.15$，所以 $x = 1.65$。設 $y = x - 1.65$，即在平衡位置之下的位移（displacement）。於是

$$\ddot{y} = 2g - \frac{20g}{3}(y + 0.15) = -\frac{20g}{3}\,y,$$

這是繞 $y=0$ 的簡諧運動，其中 $\omega^2=\dfrac{20g}{3}$。只要彈性繩處於拉緊狀態，這結果便成立，正如題目所要求。

返回所需的時間

P 由靜止出發，起點為 $y=2-1.65=0.35$，所以在彈性繩拉緊期間

$$y=0.35\cos\omega t.$$

彈性繩在 $x=1.5$ 時變得鬆弛，即 $y=-0.15$。所以首次出現這情況的時刻 t_1 滿足

$$\cos\omega t_1=-\frac{0.15}{0.35}=-\frac{3}{7}.$$

想一想 $\cos\omega t_1=-\frac{3}{7}$ 的各個解之中，我們要的是哪一個？又怎樣用 arccos 把它寫出來？

當 t 由 0 開始增加時，ωt 亦由 0 開始增加，而 $\cos\omega t$ 首次達到 $-\frac{3}{7}$ 時，ωt 位於 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 之內。由於 $\arccos\frac{3}{7}\in(0,\frac{\pi}{2})$ 且 $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$，這個值就是 $\omega t_1=\pi-\arccos\frac{3}{7}$。因此

$$t_1=\frac{1}{\omega}\left(\pi-\arccos\tfrac{3}{7}\right)=\left(\frac{3}{20g}\right)^{1/2}\left(\pi-\arccos\tfrac{3}{7}\right).$$

（作為驗算，此時的速率為 $\omega\sqrt{0.35^2-0.15^2}=\sqrt{\frac{20g}{3}\times0.1}=\sqrt{\frac{2g}{3}}$，與能量計算的結果吻合。）

彈性繩鬆弛期間，P 只在重力作用下運動。它以速率 $v=\sqrt{2g/3}$ 向上離開 $x=1.5$，然後以相同的速率向下回到 $x=1.5$，所需時間為

$$t_2=\frac{2v}{g}=\frac{2}{g}\sqrt{\frac{2g}{3}}=\left(\frac{8}{3g}\right)^{1/2}.$$

若作用力只取決於位置，運動便是可逆的。P 在 $x=1.5$ 重新進入拉緊區域時，速率與離開時相同，於是它把簡諧運動階段倒過來重走一遍，再用 t_1 的時間在 $y=0.35$（即原來的位置）靜止下來。總時間為

$$\begin{aligned}2t_1+t_2&=2\left(\frac{3}{20g}\right)^{1/2}\left(\pi-\arccos\tfrac{3}{7}\right)+\left(\frac{8}{3g}\right)^{1/2}\\&=\left(\frac{8}{3g}\right)^{1/2}+\left(\frac{3}{5g}\right)^{1/2}\left(\pi-\arccos\tfrac{3}{7}\right),\end{aligned}$$

其中用到 $2\sqrt{3/(20g)}=\sqrt{12/(20g)}=\sqrt{3/(5g)}$。這就是所要求的結果。

驗算

- 求自然長度處速率的兩種方法（能量法，以及簡諧運動的 $v^2 = \omega^2(a^2 - y^2)$）同樣得出 $v^2 = \frac{2g}{3}$。
- 取 $g = 9.8$，公式給出約 1.0199 s。以數值方法逐步求解運動方程（當 $x < 1.5$ 時把張力關掉），得出返回起點並靜止所需的時間相同，而最高點亦在天花板之下 $\frac{7}{6}$ m。
- 若沒有鬆弛階段，簡諧運動的週期（period）會是 $2\pi/\omega \approx 0.77$ s。我們的 $2t_1 \approx 0.50$ s 比這個值小，這是應有的結果，因為只完成了振動的一部分。

常見錯誤

- 把簡諧運動的中心寫成自然長度處，而不是平衡位置。重力把中心移到伸長量為 0.15 m 之處。
- 取 $\omega t_1 = \arccos(-\frac{3}{7})$，卻沒有認出這就是 $\pi - \arccos\frac{3}{7}$。
- 忘記回程：所求的時間包括上升以及返回，所以兩個階段都要加倍。

STEP 之外

這是一個分段定義的，或稱「非光滑」（non-smooth）的動力系統（dynamical system）：不同的區域適用不同的運動方程，而各段的解則在邊界處透過位置和速度的配對拼接起來。同樣的想法也支配着彈跳的球、碰撞和開關電路，而我們用過的可逆性論證，正是初次窺見保守系統（conservative system）中的時間反演對稱性（time-reversal symmetry）。想了解更多，可參閱 Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。