詳細解答

STEP II 2000，第 10 題

力學 • 連接滑輪系統

STEP II 2000，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

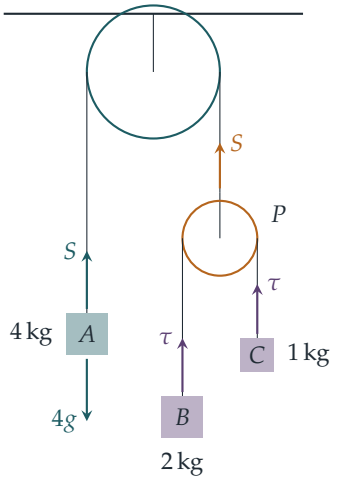
step.maths.org/questions/00-s2-q10

關鍵思路

這是一部雙重阿特伍德機（double Atwood machine）。當 A 被固定時，第二個滑輪（pulley）不動，B、C 組成一部普通的阿特伍德機。一旦放開 A，第二個滑輪也會移動，所以最乾淨利落的入手方法，是量度 B 和 C 相對於該滑輪的運動，並利用「輕滑輪所受合力（net force）為零」這個事實：滑輪上方的繩的拉力，恰好是下方那條繩的張力（tension）的兩倍。

解答

我們把各質點（particle）視為點質量，把繩視為輕（light）而不可伸長（inextensible），並把兩個滑輪都視為光滑（smooth）而輕。稱第二個滑輪為 P。所有加速度（acceleration）一律取向下為正，以 S 表示穿過 A 的那條繩的張力，以 τ 表示 BC 的張力，而 g 的單位為 $\mathrm{m\,s^{-2}}$。



由於 P 是輕的，它所受的合力必定為零（否則它的加速度會是無限大）。它被 S 向上拉，兩邊又各被 τ 向下拉，所以在任何時刻都有

$$S = 2\tau$$

。

第一階段：A 被固定

A 被固定不動時，繞過固定滑輪的繩不會移動，所以 P 固定不動。這時 B 和 C 就是一部普通的阿特伍德機：若 B 以 a 向下加速，則 C 以 a 向上加速。由牛頓第二定律(Newton's second law）得

$$2a = 2g - \tau, \qquad 1 \cdot a = \tau - g.$$

兩式相加，得 $3a = g$，所以

$$a = \tfrac{1}{3}g, \qquad \tau = \tfrac{4}{3}g.$$

因此 B 向下加速，C 向上加速，大小各為 $\frac{1}{3}g\ \mathrm{m\,s^{-2}}$。

在這個階段結束時（$t = T$），B 正向下運動，C 正向上運動，速率各為 $\frac{1}{3}gT$，而 B 已下降了 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}g\,T^2 = \frac{1}{6}gT^2$。在整個階段中，$A$ 和 P 都靜止不動。

第二階段：全部自由運動

設 A 的加速度為 a_A（向下）。繞過固定滑輪的繩長度不變，所以 P 的加速度為 $-a_A$：A 下降得多快，它就上升得多快。

> ? **想一想** 當 B 和 C 所懸掛的滑輪本身也在加速時，我們該怎樣描述它們的加速度？

相對於 P 而言，繩 BC 的表現與固定的阿特伍德機完全一樣：若 B 相對於 P 以加速度 r 向下運動，則 C 相對於 P 以加速度 r 向上運動。再加上 P 本身的加速度，得

$$a_B = -a_A + r, \qquad a_C = -a_A - r.$$

現在對每個質點應用牛頓第二定律（向下為正），並利用 $S = 2\tau$：

$$\begin{aligned} A:&\quad 4a_A = 4g - 2\tau,\\ B:&\quad 2(-a_A + r) = 2g - \tau,\\ C:&\quad 1(-a_A - r) = g - \tau. \end{aligned}$$

由 A 的方程得 $\tau = 2g - 2a_A$。把它代入 B 的方程，得 $-2a_A + 2r = 2a_A$，所以 $r = 2a_A$。把兩者都代入 C 的方程：

$$-3a_A = g - (2g - 2a_A) = -g + 2a_A \quad\Longrightarrow\quad a_A = \tfrac{1}{5}g.$$

於是 $r = \frac{2}{5}g$，$\tau = \frac{8}{5}g$，$S = \frac{16}{5}g$，並且

$$a_A = \tfrac{1}{5}g\,(\text{向下}), \qquad a_B = -\tfrac{1}{5}g + \tfrac{2}{5}g = \tfrac{1}{5}g\,(\text{向下}), \qquad a_C = -\tfrac{1}{5}g - \tfrac{2}{5}g = -\tfrac{3}{5}g,$$

所以 C 以 $\frac{3}{5}g\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ 向上加速。

這些加速度都是常數，而且在 A 被釋放的一刻，沒有任何量突然改變：A 和 P 由靜止開始運動，而 B、C 則保持原有的速率 $\frac{1}{3}gT$。

A 的速率

在第一階段中 B 移動了 $\frac{1}{6}gT^2$，所以它還要再走

$$0.6\,gT^2 - \tfrac{1}{6}gT^2 = \tfrac{3}{5}gT^2 - \tfrac{1}{6}gT^2 = \tfrac{13}{30}gT^2$$

。在第二階段中，B 開始時的向下速度為 $\frac{1}{3}gT$，向下加速度為 $\frac{1}{5}g$，所以它的速度一直為正，所走的距離等於它的位移。若這段路程需時 t，則由 $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ 得

$$\tfrac{1}{3}gT\,t + \tfrac{1}{10}gt^2 = \tfrac{13}{30}gT^2.$$

設 $t = kT$，並把全式乘以 $30/(gT^2)$：

$$3k^2 + 10k - 13 = 0 \quad\Longrightarrow\quad (k-1)(3k+13) = 0.$$

由於 $t > 0$，故 $k = 1$：第二階段恰好歷時 T 秒。A 在這個階段由靜止開始，加速度為 $\frac{1}{5}g$，所以它這時的速率為

$$v_A = \tfrac{1}{5}g \cdot T = \tfrac{gT}{5}\ \mathrm{m\,s^{-1}}.$$

驗算

- 把求得的數值代入，每條運動方程都成立：對 A 而言，$4 \cdot \frac{1}{5}g = 4g - \frac{16}{5}g$；對 C 而言，$-\frac{3}{5}g = g - \frac{8}{5}g$。
- 一個獨立的驗算：兩條繩迫使 $y_C = \text{常數} - 2y_A - y_B$（各位置均以向下量度），而以兩個自由坐標 y_A、y_B 運用能量方法，同樣得出 $a_A = a_B = \frac{1}{5}g$，$a_C = -\frac{3}{5}g$。
- 取 $g = 9.8$，$T = 1.7$，以數值方法逐步計算運動，B 在 $t = 3.400$（即 $2T$）時走了 $0.6gT^2$，此時 A 的速率為 $3.332 = gT/5$。
- 總重量為 $7g$，但固定滑輪只承受 $2S = \frac{32}{5}g$，小於 $7g$，所以在第二階段中，系統的質心（centre of mass）向下加速，理應如此。

常見錯誤

- 在第二階段仍把 P 當作固定，並對 B 和 C 沿用 $\pm\frac{1}{3}g$。
- 忘記了輕滑輪有 $S = 2\tau$，或者為滑輪加上質量項。
- 把整段 $0.6gT^2$ 當作第二階段的距離，而沒有減去已經走過的 $\frac{1}{6}gT^2$。

STEP 之外

像第二項驗算那樣，選取能自動滿足繩的約束條件的位置坐標，正是拉格朗日力學（Lagrangian mechanics）的起點：把動能（kinetic energy）和勢能（potential energy）用自由坐標表示出來，運動方程便隨之而得，完全不必理會張力。Kleppner 與 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教材）對滑輪這類受約束系統有細緻的處理，是很好的下一步讀物。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。