詳細解答

STEP II 2000，第 1 題

純數學 • 埃及分數

> **STEP II 2000，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/00-s2-q1

關鍵思路

兩個例子有共同的規律：第一個分母比 N 大一，第二個分母則是 N 與它的乘積。至於唯一性的部分，先去分母，再「配成矩形」，便可把 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{N}$ 化為兩個整數之積等於 N^2 的形式。質數（prime）的平方只有極少數的因數分解（factorisation）方式，所以 a 和 b 的可能取值寥寥可數，我們只需逐一列出即可。

解答

一般結果

在 $\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ 和 $\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$ 中，分母分別是 $N+1$ 和 $N(N+1)$（因為 $6=2\times 3$ 而 $12=3\times 4$）。於是我們猜想

$$\frac{1}{N}=\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N(N+1)}.$$

要證明這條式，只需把右邊通分：

$$\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N(N+1)}=\frac{N+1}{N(N+1)}=\frac{1}{N}.$$

兩個分母都是大於 1 的整數，所以兩項都是單位分數（unit fraction）。又因為當 $N>1$ 時 $N(N+1)>N+1$，所以兩者相異。因此，每個單位分數都可以寫成兩個相異單位分數之和。

N 為質數時的唯一性

把 $\frac{1}{N} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 兩邊乘以 abN，得 $ab = Nb + Na$，即

$$ab - Na - Nb = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad ab - Na - Nb + N^2 = N^2 \quad \Longleftrightarrow \quad (a-N)(b-N) = N^2.$$

每一步都可以逆推（因為 a、b、N 均不為零），所以 $(*)$ 的解恰好就是 $(a-N)(b-N) = N^2$ 的解。

> **想一想** $a - N$ 和 $b - N$ 有沒有可能同時為負數？

不可能。由於 $\frac{1}{b} > 0$，我們有 $\frac{1}{a} < \frac{1}{N}$，所以 $a > N$；同理 $b > N$。因此 $a - N$ 和 $b - N$ 是乘積為 N^2 的正整數。（這一點值得留意：若沒有這一步，$(-1, -N^2)$ 這一對便會是另一個需要排除的因數分解。）

現在設 $N = p$ 為質數。p^2 的正因數（divisor）只有 1、p 和 p^2，所以 $(a-p, b-p)$ 這一對必定是以下其中之一：

$$(1, p^2), \qquad (p, p), \qquad (p^2, 1).$$

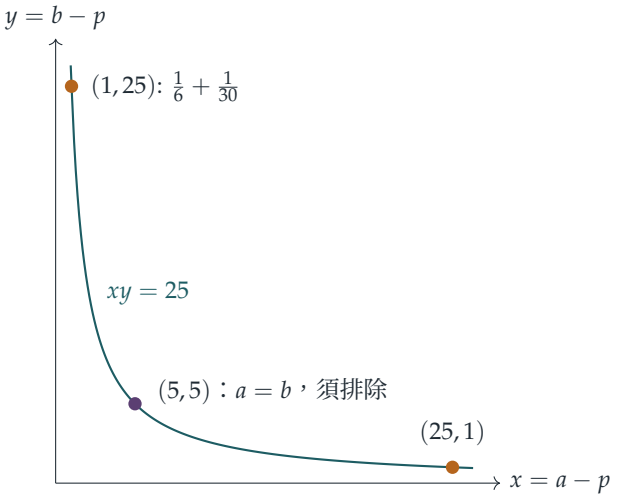
- (p, p) 給出 $a = b = 2p$，即 $\frac{1}{p} = \frac{1}{2p} + \frac{1}{2p}$：兩個單位分數並不相異，所以這個情況須排除。
- $(1, p^2)$ 給出 $a = p + 1$，$b = p^2 + p = p(p+1)$，這正是上面找到的表示式；$(p^2, 1)$ 則是同一對數，只是次序對調。

所以，若不計兩項的次序，唯一的寫法是

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p(p+1)},$$

這正是所要證明的。

下圖說明了箇中原因：這些解就是雙曲線（hyperbola）$xy = p^2$ 在正象限內的格點（lattice point），其中 $x = a - p$，$y = b - p$。圖中 $p = 5$。



形如 $2/N$ 的分數

現在假設 $\frac{2}{N} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$，其中 $N = p$ 是奇質數。兩邊乘以 abp，得 $2ab = pa + pb$。要配成矩形，我們先乘以 2：

$$4ab - 2pa - 2pb = 0 \iff 4ab - 2pa - 2pb + p^2 = p^2 \iff (2a - p)(2b - p) = p^2.$$

想一想 為甚麼要先乘以 2 才作因式分解？

若直接把 $2ab - pa - pb$ 因式分解，便會出現 $(a - \frac{p}{2})$ 這類項，而它們並不是整數。乘以 2 之後，一切都保持為整數，所以因式 $2a - p$ 和 $2b - p$ 都是整數，我們便可以運用整除性（divisibility）。

與之前一樣，$\frac{1}{a} < \frac{2}{p}$，所以 $2a > p$，即 $2a - p > 0$；同理 $2b - p > 0$。p^2 的正因數是 1、p、p^2，所以 $(2a - p, 2b - p)$ 是以下其中之一：

$$(1, p^2), \qquad (p, p), \qquad (p^2, 1).$$

- (p, p) 給出 $a = b = p$，即 $\frac{2}{p} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p}$：兩者並不相異，須排除。
- $(1, p^2)$ 給出

  $$a = \frac{p+1}{2}, \qquad b = \frac{p^2 + p}{2} = \frac{p(p+1)}{2}.$$

  由於 p 是奇數，$p + 1$ 是偶數，所以兩者都是整數。由於 $p \geq 3$，$a \geq 2$，所以兩者都大於 1；而 $b = pa > a$，所以兩者相異。$(p^2, 1)$ 的情況是同一對數，只是次序對調。

直接驗證：

$$\frac{2}{p+1} + \frac{2}{p(p+1)} = \frac{2(p+1)}{p(p+1)} = \frac{2}{p}.$$

所以 $\frac{2}{p}$ 可以寫成兩個相異單位分數之和，而且（不計次序）唯一的寫法是

$$\frac{2}{p} = \frac{1}{\frac{1}{2}(p+1)} + \frac{1}{\frac{1}{2}p(p+1)},$$

這就證明了最後的結果。

驗算

- $p=3$：$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$；$p=5$：$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$；$p=7$：$\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$。
- 以電腦搜尋所有 $N < 300$，結果發現：對每個質數 N，$\frac{1}{N}$ 恰好有一種表示法；對每個奇質數 N，$\frac{2}{N}$ 也恰好有一種表示法，與上面的公式吻合。
- 質數這個條件確實重要：$N = 6$ 有四種表示法，例如 $\frac{1}{6} = \frac{1}{7} + \frac{1}{42} = \frac{1}{8} + \frac{1}{24} = \frac{1}{9} + \frac{1}{18} = \frac{1}{10} + \frac{1}{15}$，每一種對應一個因數分解 $36 = 1\times 36 = 2\times 18 = 3\times 12 = 4\times 9$（$6\times 6$ 這一對則給出 $a=b$）。
- 為甚麼要 $p>2$：當 $p=2$ 時，$\frac{2}{2}=1$ 不能寫成 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 的形式（其中 $a,b>1$ 且相異），而 $(p+1)/2$ 也確實不是整數。

常見錯誤

- 忘記證明 $a-N>0$ 和 $b-N>0$，因而忽略了 N^2 的負因數分解。
- 沒有排除 $N\times N$ 這個因數分解，它給出的是兩個相等的單位分數。
- 在 $2/N$ 的情況中，沒有檢查 $\frac{1}{2}(p+1)$ 是否整數（這正是用到 $p\neq 2$ 的地方）。

STEP 之外

把分數寫成相異單位分數之和，可追溯至古埃及人，而「埃及分數」（Egyptian fractions）至今仍有未解決的問題：艾狄胥–施特勞斯猜想（Erdős–Straus conjecture）指出，對所有 $N\geq 2$，$\frac{4}{N}$ 總可以寫成三個單位分數之和，但至今無人能夠證明。把 $xy - Nx - Ny = 0$ 化為 $(x-N)(y-N) = N^2$ 的技巧，是處理丟番圖方程（Diophantine equation）的標準工具，而數算解的個數就變成數算因數的個數。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（一本數論入門書）是進一步認識因數與質數的上佳讀物。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。