詳細解答

STEP I 2000，第 9 題

力學 • 加速參考系中的拋體

STEP I 2000，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/00-s1-q9

關鍵思路

射程是在車廂內量度的，所以應在車廂的參考系（frame of reference）中考慮問題。由於車廂以加速度 a 向北加速，炮彈相對於地板的加速度是向下的 g 加上向南的 a，而向南正是大炮發射的方向。這仍然是一個恆加速度的拋體運動（projectile motion），只是多了一個水平項。只要把射程用 2θ 表示出來，求其最大值便只需一行微分。

解答

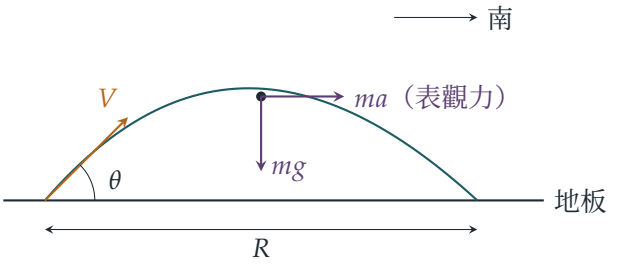
車廂內的射程

把炮彈當作質點（particle），並忽略空氣阻力。假設炮彈從地板高度發射並落在地板上，而且車廂夠長，炮彈會落在車廂之內。取 x 為水平方向並指向南（沿發射方向），y 為鉛垂向上，兩者均相對於車廂量度。

在地面參考系中，炮彈的加速度為向下的 g，並沒有水平加速度。車廂的加速度為向北的 a。因此炮彈相對於車廂的加速度為

$$\ddot{x} = 0 - (-a) = a, \qquad \ddot{y} = -g.$$

換一個說法，在車廂的參考系中，質量為 m 的炮彈除了受本身的重量作用外，還受到一個向南的表觀力（apparent force）ma。



相對於車廂的初速度為向南的 $V\cos\theta$ 和向上的 $V\sin\theta$，所以

$$x = Vt\cos\theta + \tfrac{1}{2}at^2, \qquad y = Vt\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

鉛垂方向的運動不受 a 影響：炮彈在 $y = 0$ 且 $t > 0$ 時着地，即在 $T = \dfrac{2V\sin\theta}{g}$ 時着地。因此它在車廂內的射程為

$$\begin{aligned} R = x(T) &= \frac{2V^2\sin\theta\cos\theta}{g} + \frac{a}{2}\cdot\frac{4V^2\sin^2\theta}{g^2} \\ &= \frac{V^2}{g}\left(\sin 2\theta + \frac{a}{g}(1-\cos 2\theta)\right), \end{aligned}$$

當中用到 $2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$ 和 $2\sin^2\theta = 1 - \cos 2\theta$。

求射程的最大值

對 θ 求導，得

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\theta} = \frac{2V^2}{g}\left(\cos 2\theta + \frac{a}{g}\sin 2\theta\right),$$

它在以下情況等於零：

$$\boxed{\tan 2\theta = -\frac{g}{a}.}$$

想一想 正切是負數？這是否表示哪裏出了錯？

並沒有出錯。當 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 時，我們有 $0 < 2\theta < \pi$，而 $\tan 2\theta < 0$ 只不過表示 2θ 位於 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 之內，所以 $\theta > \frac{\pi}{4}$。這是合理的：只要炮彈仍在空中，額外的推動 a 便一直起作用，所以發射角比 45° 稍高一點、換取更長的飛行時間是划算的。若 $a = 0$，便有 $\cos 2\theta = 0$，得出大家熟悉的 $\theta = \frac{\pi}{4}$。

要確認這是最大值，設 $\tan\varphi = \dfrac{a}{g}$，其中 $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$。於是

$$\sin 2\theta - \frac{a}{g}\cos 2\theta = \frac{\sin(2\theta - \varphi)}{\cos\varphi}, \qquad \text{所以} \qquad R = \frac{V^2}{g}\left(\frac{\sin(2\theta-\varphi)}{\cos\varphi} + \frac{a}{g}\right).$$

當 $2\theta - \varphi = \frac{\pi}{2}$ 時，此式取最大值，即 $2\theta = \frac{\pi}{2} + \varphi$，而這正是 $\tan 2\theta = -g/a$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 內的根。所以最佳發射角的準確值為

$$\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\arctan\frac{a}{g},$$

又由於 $\cos\varphi = g/\sqrt{g^2+a^2}$，最大射程的準確值為

$$R_{\max} = \frac{V^2}{g}\left(\frac{\sqrt{g^2+a^2}}{g} + \frac{a}{g}\right) = \frac{V^2}{g^2}\left(a + \sqrt{g^2+a^2}\right).$$

a 很小的情況

當 u 很小時，$\arctan u = u + O(u^3)$。取 $u = a/g$，得

$$\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{g} + O\left(\frac{a^3}{g^3}\right)\right) \approx \frac{\pi}{4} + \frac{a}{2g},$$

這正是所需的結果。至於射程，$\sqrt{g^2+a^2} = g\sqrt{1+a^2/g^2} = g + O(a^2/g)$，所以

$$R_{\max} = \frac{V^2}{g^2}(a + g + O(a^2/g)) \approx \frac{V^2}{g} + \frac{V^2 a}{g^2},$$

這就是第二個所需的結果。兩個近似式都準確至 a/g 的一階（first order）；略去的各項為 $(a/g)^2$ 階或更小。

如果你想繼續使用 $\tan 2\theta$，可設 $2\theta = \frac{\pi}{2} + \varepsilon$。於是 $\tan 2\theta = -\cot\varepsilon \approx -1/\varepsilon$，所以 $\varepsilon \approx a/g$。把 $\sin 2\theta = \cos\varepsilon \approx 1$ 和 $\cos 2\theta = -\sin\varepsilon \approx -\varepsilon$ 代入 R，可得準確至一階的 $R \approx \frac{V^2}{g}(1 + \frac{a}{g})$。

驗算

- $a = 0$：公式化簡為 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 和 $R_{\max} = V^2/g$，即水平地面上的標準結果。
- 量綱（dimensions）：a/g 是無量綱的，而 V^2/g 是長度，正如所料。
- 數值上，取 $V = 7$、$g = 9.8$ 和 $a = 1.3$，在地面參考系中逐步計算運動，再減去車廂的位置，所得結果與 R 的公式吻合（例如在 $\theta = 0.7$ 時 $R \approx 5.478$）。對若干個隨機選取的 a，以窮舉法搜尋 θ，發現最大值出現在 $\tan 2\theta = -g/a$ 之處，而 $R_{\max}$ 與 $\frac{V^2}{g^2}(a + \sqrt{g^2+a^2})$ 吻合至 10 位有效數字。當 $a = 0.05$ 時，最佳發射角的準確值 $0.787949\ldots$ 與 $\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2g}$ 吻合至小數點後七位。

常見錯誤

- 弄錯 a 的正負號。車廂加速的方向與炮彈的發射方向相反，所以相對於地板，炮彈向南的速率會增加：$\frac{1}{2}aT^2$ 這一項是加上去的，而不是減去的。

- 量度了地面上的射程，而不是車廂內的射程。題目問的是沿車廂地板的距離。
- 用計算機求得 $2\theta = \arctan(-g/a)$，這樣會得出一個負的角。正確的根位於 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 之內。

STEP 之外

在加速參考系中考慮問題，並加上一個表觀力 $-m\mathbf{a}$，是*假想力*（fictitious force）最簡單的例子。旋轉參考系也以同樣的方式引入離心力（centrifugal force）和科里奧利力（Coriolis force）。在本題中，表觀力只不過令「等效重力」傾斜，使其大小變為 $\sqrt{g^2 + a^2}$，這是理解答案中為何出現 $\sqrt{g^2 + a^2}$ 的一種方法。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）對非慣性參考系（non-inertial frame）有清晰的講解。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。