詳細解答

STEP I 2000，第 8 題

純數學 • 絕對值的積分

> **STEP I 2000，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/00-s1-q8

關鍵思路

處理積分（integral）內的絕對值（modulus）符號，方法是找出符號內的式子在何處變號。在相鄰兩個變號點之間的每個區間上，$|f|$ 不是 f 就是 $-f$，所以我們在這些點把積分範圍拆開，然後對普通的函數逐段積分。真正要花工夫的，是找出零點的位置：$x\mathrm{e}^x$ 可憑觀察得出，三次式要靠因式分解（factorising），而 $\sin x + \cos x$ 則要寫成單一個正弦波。

解答

第一個積分

由於對所有 x 都有 $\mathrm{e}^x > 0$，$x\mathrm{e}^x$ 的正負號與 x 的正負號相同。因此在 $[-1, 0]$ 上有 $x\mathrm{e}^x \le 0$ 及 $|x\mathrm{e}^x| = -x\mathrm{e}^x$，而在 $[0, 1]$ 上則有 $x\mathrm{e}^x \ge 0$ 及 $|x\mathrm{e}^x| = x\mathrm{e}^x$。在 0 處把積分範圍拆開，

$$\int_{-1}^{1} |x\mathrm{e}^x| \,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} (-x\mathrm{e}^x) \,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} x\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = -\int_{-1}^{0} x\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} x\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x,$$

這正是所需的恆等式。

要計算其值，可用分部積分法（integration by parts），取 $u = x$ 及 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x$：

$$\int x\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = (x-1)\mathrm{e}^x + c.$$

因此

$$\int_{-1}^{0} x\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \left[(x-1)\mathrm{e}^x\right]_{-1}^{0} = -1 - (-2\mathrm{e}^{-1}) = \frac{2}{\mathrm{e}} - 1,$$

$$\int_{0}^{1} x\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \left[(x-1)\mathrm{e}^x\right]_{0}^{1} = 0 - (-1) = 1.$$

其中第一個積分是負數（這是必然的，因為被積函數（integrand）在該區間上是負的），於是

$$\int_{-1}^{1} |xe^x|\,\mathrm{d}x = \left(1 - \frac{2}{\mathrm{e}}\right) + 1 = 2 - \frac{2}{\mathrm{e}}.$$

第 (i) 部分

設 $p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$。把各項分組，

$$p(x) = x^2(x-2) - (x-2) = (x-2)(x^2-1) = (x+1)(x-1)(x-2).$$

在 $[0,4]$ 內的零點只有 $x = 1$ 和 $x = 2$。首項係數為正、且有單根（simple root）$-1, 1, 2$ 的三次式，在 -1 與 1 之間為正，在 1 與 2 之間為負，在 2 之後為正。所以

$$|p(x)| = \begin{cases} p(x), & 0 \le x \le 1, \\ -p(x), & 1 \le x \le 2, \\ p(x), & 2 \le x \le 4. \end{cases}$$

取原函數（antiderivative）

$$F(x) = \tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{2}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 + 2x,$$

則有

$$F(0) = 0, \qquad F(1) = \tfrac{1}{4} - \tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{2} + 2 = \tfrac{13}{12},$$
$$F(2) = 4 - \tfrac{16}{3} - 2 + 4 = \tfrac{2}{3}, \qquad F(4) = 64 - \tfrac{128}{3} - 8 + 8 = \tfrac{64}{3}.$$

? **想一想** 為甚麼不能直接計算 $F(4) - F(0)$，然後取其絕對值？

因為絕對值必須作用在被積函數上，而不是作用在答案上。在 $[1,2]$ 上這個三次式是負的，$F(4) - F(0)$ 會把那塊面積減去，而不是加上。所以我們把三段分開處理：

$$\begin{aligned} \int_0^4 |p(x)|\,\mathrm{d}x &= (F(1) - F(0)) - (F(2) - F(1)) + (F(4) - F(2)) \\ &= \tfrac{13}{12} - (\tfrac{2}{3} - \tfrac{13}{12}) + (\tfrac{64}{3} - \tfrac{2}{3}) \\ &= \tfrac{13}{12} + \tfrac{5}{12} + \tfrac{62}{3} = \tfrac{3}{2} + \tfrac{62}{3} = \frac{133}{6}. \end{aligned}$$

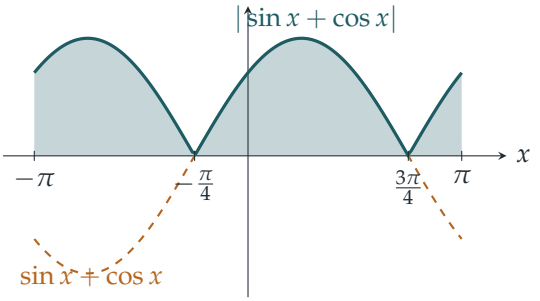
每一項都是正數，這是應有的結果：$\frac{13}{12}$、$\frac{5}{12}$ 和 $\frac{62}{3}$ 就是三塊各自的面積。（作為比較，$F(4) - F(0) = \frac{64}{3}$，比正確答案少了 $2 \times \frac{5}{12}$。）

第 (ii) 部分

利用 $\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x + \cos x)$，

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\,\sin(x + \tfrac{\pi}{4}).$$

在 $[-\pi, \pi]$ 內，此式在 $x = -\frac{\pi}{4}$ 及 $x = \frac{3\pi}{4}$ 處為零。它在 $[-\pi, -\frac{\pi}{4}]$ 和 $[\frac{3\pi}{4}, \pi]$ 上為負，在兩者之間為正。



我們可以像之前那樣拆成三段，但其實有一條更簡潔的路。作代換（substitution）$u = x + \frac{\pi}{4}$：

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x + \cos x| \, \mathrm{d}x = \sqrt{2} \int_{-3\pi/4}^{5\pi/4} |\sin u| \, \mathrm{d}u.$$

函數 $|\sin u|$ 的周期（period）為 π，而新的積分範圍長度為 2π，所以剛好涵蓋兩個周期。周期函數在整數個周期上的積分，與起點在哪裏無關，所以

$$\sqrt{2} \int_{-3\pi/4}^{5\pi/4} |\sin u| \, \mathrm{d}u = \sqrt{2} \times 2 \int_{0}^{\pi} \sin u \, \mathrm{d}u = \sqrt{2} \times 2 \times 2 = 4\sqrt{2}.$$

如果你較喜歡直接拆開來做，$G(x) = \sin x - \cos x$ 是 $\sin x + \cos x$ 的一個原函數，其中 $G(-\pi) = 1$、$G(-\frac{\pi}{4}) = -\sqrt{2}$、$G(\frac{3\pi}{4}) = \sqrt{2}$ 及 $G(\pi) = 1$。三塊面積分別是 $1 + \sqrt{2}$、$2\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{2} - 1$，加起來是 $4\sqrt{2}$。

驗算

- 在每一段上（被積函數在該段上是光滑的）使用辛普森法則（Simpson's rule），第一個積分得 1.264241 . . .，與 $2 - 2/\mathrm{e} \approx 1.264241$ 吻合。
- 對於 (i)，數值積分（numerical integration）得 22.16667，與 $\frac{133}{6}$ 吻合。它也比 $F(4) - F(0) = \frac{64}{3} \approx 21.33$ 略大，這是必然的，因為絕對值把一小塊負面積變成了正面積。
- 對於 (ii)，數值積分得 5.656854，與 $4\sqrt{2}$ 吻合。再作一個合理性檢查：$|\sin x + \cos x|$ 的形狀與 $\sqrt{2}|\sin x|$ 相同，後者的平均值為 $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$，而 $2\pi \times \frac{2\sqrt{2}}{\pi} = 4\sqrt{2}$。

常見錯誤

- 直接跨過變號點積分，到最後才取絕對值。這樣會把每一個負的區域都少算了。

- 在 (i) 中遺漏了 $x = 1$ 這個根。務必徹底因式分解，或至少用因式定理（factor theorem）檢查細小的整數根。
- 計算 $\left[(x-1)\mathrm{e}^{x}\right]_{-1}^{0}$ 時弄錯正負號：在 $x = -1$ 處的值是 $-2\mathrm{e}^{-1}$，所以減去它即是加上 $2/\mathrm{e}$。

STEP 之外

積分 $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ 是曲線與坐標軸之間的總面積。到了大學，它會以 f 的 L^1 範數（norm）的身分再次出現，這是量度一個函數的大小、以及兩個函數之間距離的一種方法。證明只要 f 可積（integrable）則 $|f|$ 亦可積，以及證明 $\left|\int f\right| \le \int |f|$，是實分析（real analysis）入門階段的標準習題。Abbott 的 *Understanding Analysis*（實分析入門教材）對黎曼積分（Riemann integral）的建構相當嚴謹，足以證明這兩個結果。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。