詳細解答

# STEP I 2000，第 7 題

純數學 • 導數的界限

> **STEP I 2000，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/00-s1-q7

## 關鍵思路

求導之後，條件 $\mathrm{f}'(x) \geq 0$ 就變成「$a$ 不小於某個關於 $x$ 的函數」。因此一切取決於該函數的最大值。這個函數只與 $x^2$ 有關，經代換（substitution）$u = 1 + x^2$ 後，它成為 $1/u$ 的二次式。再用配方法（completing the square）便可求得最大值，並清楚看出最大值在何處取得。

## 解答

### 導數

由商法則（quotient rule），

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^3}{1+x^2}\right) = \frac{3x^2(1+x^2) - x^3 \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{x^4 + 3x^2}{(1+x^2)^2},$$

所以

$$\mathrm{f}'(x) = a - g(x), \qquad \text{其中} g(x) = \frac{x^2(x^2+3)}{(1+x^2)^2}.$$

因此，$\mathrm{f}'(x) \geq 0$ 對所有 $x$ 成立，當且僅當 $a \geq g(x)$ 對所有 $x$ 成立。我們需要求出 $g$ 的最大值。

### $g$ 的最大值

設 $u = 1 + x^2$，則 $u \geq 1$ 且 $x^2 = u - 1$。於是

$$g = \frac{(u-1)(u+2)}{u^2} = \frac{u^2 + u - 2}{u^2} = 1 + \frac{1}{u} - \frac{2}{u^2}.$$

**想一想** 為甚麼用 $1/u$ 而不是 $u$ 來表示這個式子會較好？

以 $s = 1/u$ 表示，$g = 1 + s - 2s^2$，這只是一個二次式，而二次式的最大值可由配方法求得，無須用到微積分：

$$1 + s - 2s^2 = \frac{9}{8} - 2\left(s - \frac{1}{4}\right)^2.$$

由於平方永不為負，對每個 $x$ 都有 $g \le \frac{9}{8}$，等號僅在 $s = \frac{1}{4}$ 時成立，即 $u = 4$，$x = \pm\sqrt{3}$。

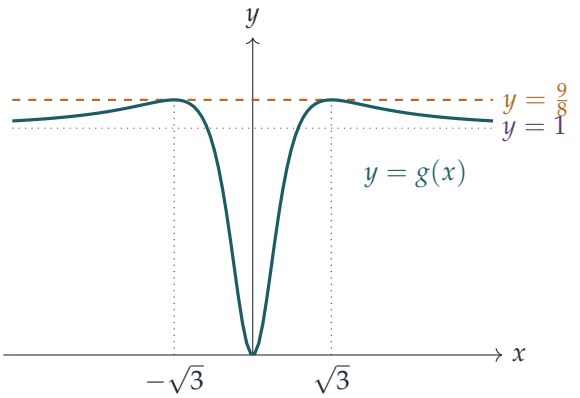
把結果寫回 $x$ 的形式（利用 $s - \frac{1}{4} = \frac{3-x^2}{4(1+x^2)}$），便得到導數的一個簡潔恆等式（identity）：

$$\mathrm{f}'(x) = \left(a - \frac{9}{8}\right) + \frac{(3-x^2)^2}{8(1+x^2)^2}.$$

### 結論

若 $a \ge \frac{9}{8}$，第一個括號非負，而第二項是一個平方除以正數，所以同樣非負。因此 $\mathrm{f}'(x) \ge 0$ 對所有 $x$ 成立，正如所求。

常數 $\frac{9}{8}$ 也是最佳的：若 $a < \frac{9}{8}$，則 $\mathrm{f}'(\sqrt{3}) = a - \frac{9}{8} < 0$。當 $a = \frac{9}{8}$ 時，$\mathrm{f}'$ 只在 $x = \pm\sqrt{3}$ 處為零，所以 f 仍然是嚴格遞增（strictly increasing）的，並有兩個駐拐點（stationary points of inflection）。




$g$ 的圖像由 0 開始上升，越過其極限（limit）1，在 $x = \pm\sqrt{3}$ 時達到頂點 $\frac{9}{8}$，然後回落並趨向 1。導數 $\mathrm{f}'(x)$ 就是直線 $y = a$ 高出這條曲線的高度。

## 驗算

▶ 在 $x = \sqrt{3}$ 處：$g = \dfrac{3 \cdot 6}{4^2} = \dfrac{18}{16} = \dfrac{9}{8}$。✓

- 當 $x \to \infty$ 時，$g \to 1 < \frac{9}{8}$。這是合理的，因為當 $x$ 很大時 $\frac{x^3}{1+x^2}$ 的表現與 $x$ 相若，所以其斜率趨向 1。
- 數值上，取 $a = \frac{9}{8}$，在 $[-100, 100]$ 上以步長 0.001 的網格計算，$\mathrm{f}'(x)$ 的最小值約為 $2 \times 10^{-10}$（基本上是 0，在 $x \approx \pm\sqrt{3}$ 處）。取 $a = 1.1$，則 $\mathrm{f}'(\sqrt{3}) = -0.025 < 0$。

## 常見錯誤

- 把 $g$ 在無窮遠處的極限 1 當作它的最大值。曲線會越過這個極限，所以答案是 $\frac{9}{8}$ 而不是 1。
- 直接對 $g$ 求導，結果迷失在繁複的代數運算之中。代換 $s = 1/(1+x^2)$ 可把問題化為一行就能完成的配方。

## STEP 之外

在這裏，一個「對所有 $x$」的命題被化為求上*確界*（supremum）的問題：$\mathrm{f}' \geq 0$ 處處成立，當且僅當 $a \geq \sup g$。$g$ 在無窮遠處有極限，卻在有限的點上取得最大值，這正好提醒我們：極限不一定是界（bound）。在分析學（analysis）中，你會證明導數非負的函數是遞增的（藉助中值定理（Mean Value Theorem）），這就是為甚麼這道題其實是在問 f 是否單調（monotonic）。Abbott 的 *Understanding Analysis* 對這些概念有細緻的闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。