詳細解答

STEP I 2000，第 6 題

純數學 • 直線所圍成的區域

> **STEP I 2000，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/00-s1-q6

關鍵思路

一個關於 x 和 y 的二次式，若能因式分解（factorise）為兩個一次因式，所描述的就是一對直線。兩個因式的積為正，當且僅當兩個因式同號；兩者異號時積為負。因此每個不等式（inequality）所選出的，都是兩條相交直線之間一對相對的「楔形」區域。只要把兩個區域畫在同一組坐標軸上，要找一個公共點，一看便知。

解答

第一個因式分解與區域

展開右邊，

$$\begin{aligned}(x-y+2)(x+y-1) &= x^2+xy-x-xy-y^2+y+2x+2y-2\\ &= x^2-y^2+x+3y-2,\end{aligned}$$

正如所求。所以把第一個不等式兩邊同時減去 2 後，得

$$(x-y+2)(x+y-1)>0.$$

邊界由兩條直線組成：

$$L_1:\ y=x+2, \qquad L_2:\ y=1-x,$$

它們的斜率（gradient）分別為 1 和 -1，並在 $x+2=1-x$ 處相交，即交於 $(-\frac{1}{2},\frac{3}{2})$。

兩個因式同號時，積為正：

- 兩者皆正：$y<x+2$ 且 $y>1-x$，即在 L_1 之下、L_2 之上。這是交點*右方*的楔形（例如它包含 $(5,0)$）；

- 兩者皆負：$y > x+2$ 且 $y < 1-x$，即在 L_1 之上、L_2 之下。這是交點*左方*的楔形（它包含 $(-5,0)$）。

所以這個區域就是直線 $y = x+2$ 與 $y = 1-x$ 之間左右相對的一對楔形，而直線本身並不包括在內（在直線上積為 0，而非 > 0）。簡單測試一下：在原點，該式的值為 $-2 < 0$，而原點位於下方的楔形內，這個楔形確實應被排除。

第二個區域

想一想 我們怎樣知道這一個也能因式分解？它的因式又應該是甚麼樣子？

由二次項 $x^2 - 4y^2 = (x+2y)(x-2y)$ 可以想到嘗試

$$x^2 - 4y^2 + 3x - 2y + 2 = (x+2y+a)(x-2y+b).$$

右邊展開後是 $x^2 - 4y^2 + (a+b)x + (2b-2a)y + ab$。比較係數（coefficient）得 $a+b=3$ 和 $b-a=-1$，所以 $a=2$，$b=1$，而常數項 $ab=2$ 亦同樣吻合。因此，把第二個不等式兩邊同時加上 2，得

$$x^2 - 4y^2 + 3x - 2y < -2 \iff (x+2y+2)(x-2y+1) < 0.$$

邊界直線為

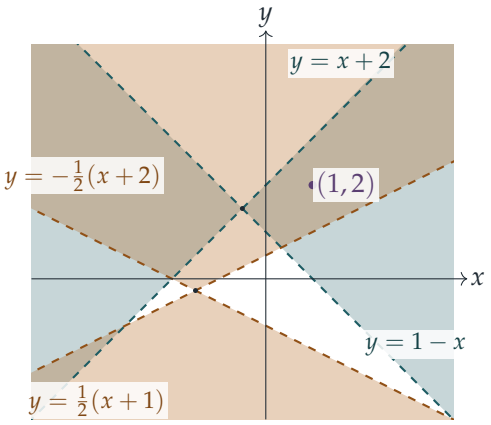
$$L_3:\ y = -\tfrac{1}{2}(x+2), \qquad L_4:\ y = \tfrac{1}{2}(x+1),$$

斜率分別為 $-\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{2}$，並在 $-x-2 = x+1$ 處相交，即交於 $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$。

這次我們需要兩個因式異號：

- $x+2y+2 > 0$ 且 $x-2y+1 < 0$：$y > -\frac{1}{2}(x+2)$ 且 $y > \frac{1}{2}(x+1)$，即在兩條直線之上。這是*上方*的楔形（它包含 $(0,5)$）；
- $x+2y+2 < 0$ 且 $x-2y+1 > 0$：在兩條直線之下。這是*下方*的楔形（它包含 $(0,-5)$）。

所以第二個區域就是直線 L_3 與 L_4 之間上下相對的一對楔形，邊界同樣不包括在內。



在草圖中，第一個區域以藍綠色塗上陰影（左右兩個楔形），第二個區域則用琥珀色（上下兩個楔形），所以顏色較深的重疊部分就是兩個不等式同時成立之處；虛線並不包括在內。

同時位於兩個區域的一點

這兩對楔形必定有重疊：右邊的藍綠色楔形在斜率為 ± 1 的兩條直線之間向右張開，而上方的琥珀色楔形則包含了位於斜率為 $\pm\frac{1}{2}$ 的兩條較平緩直線之上的所有點。當 $x > -\frac{1}{2}$ 時，藍綠色楔形的上邊 $y = x + 2$ 比直線 $y = \frac{1}{2}(x+1)$ 上升得更快，所以兩者之間留有空間。

例如取 $(x, y) = (1, 2)$。則

$$x^2 - y^2 + x + 3y = 1 - 4 + 1 + 6 = 4 > 2$$

且

$$x^2 - 4y^2 + 3x - 2y = 1 - 16 + 3 - 4 = -16 < -2,$$

所以 $(1, 2)$ 同時滿足兩個不等式。（用因式核對：$(x - y + 2)(x + y - 1) = 1 \cdot 2 > 0$ 且 $(x + 2y + 2)(x - 2y + 1) = 7 \cdot (-2) < 0$。）

驗算

- 每個因式分解都可以隨意取一點來核對：在 $(3, 1)$，$x^2 - y^2 + x + 3y - 2 = 12$ 而 $(x - y + 2)(x + y - 1) = 4 \cdot 3 = 12$；在同一點，$x^2 - 4y^2 + 3x - 2y + 2 = 14$ 而 $(x + 2y + 2)(x - 2y + 1) = 7 \cdot 2 = 14$。
- 在每個楔形內各測試一點，例如 $(0, -5)$ 給出 $x^2 - 4y^2 + 3x - 2y = -90 < -2$，確認下方的琥珀色楔形屬於第二個區域。

- 在 $[-10,10]^2$ 內隨機抽取 200 000 個點作數值檢驗，結果顯示不等式與上述楔形的描述完全一致，沒有任何出入。

常見錯誤

- 把錯誤的一對楔形塗上陰影。務必測試一點（原點最方便），而不要單靠「之上」和「之下」來判斷。
- 把常數移項時忘記了 -2 和 $+2$：第一個不等式是 $(x-y+2)(x+y-1)>0$，第二個是 $(x+2y+2)(x-2y+1)<0$。
- 把邊界直線畫成實線：這些不等式是嚴格不等式，所以直線並不包括在內。

STEP 之外

一個二元二次式 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$ 定義了一條圓錐曲線（conic）；當它能分解為兩個一次因式時，這條圓錐曲線是退化（degenerate）的，即一對直線，而這種情況恰好在由各係數構成的某個 3×3 行列式（determinant）等於零時出現。二次型（quadratic form）的正負號分佈（這裏的 x^2-y^2 和 x^2-4y^2 都是不定的（indefinite）），會在大學一年級的線性代數（linear algebra）中，透過對稱矩陣（symmetric matrix）及其特徵值（eigenvalue）來研究。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）是了解這個課題的好去處。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。