詳細解答

STEP I 2000，第 5 題

純數學 • 三維向量

STEP I 2000，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/00-s1-q5

關鍵思路

一切都發生在斜面上，所以先在這個平面內設定兩個互相垂直的單位向量（unit vector）：一個沿最大斜率線（line of greatest slope）指向正上方，另一個是水平的。Arthur 和 Bertha 的位置就是這兩個向量的簡單組合，而和差化積公式（sum-to-product formulae）可以立刻把兩者之差整理好。至於與鉛垂線所成的角，我們只需要知道平面內這兩個方向各自與鉛垂方向的關係，θ 正是在這裏出現的。

解答

建立設定

設 $\mathbf{e}$ 為沿着通過 O 的最陡直線指向上方的單位向量，並設 $\mathbf{f}$ 為平面內與 $\mathbf{e}$ 垂直、指向兩人所在一側的單位向量。由於 $\mathbf{f}$ 與最大斜率線垂直，所以它是水平的。設 $\mathbf{k}$ 為鉛垂向上的單位向量。那麼

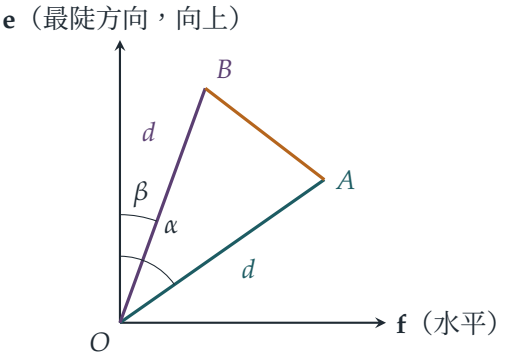
$$\mathbf{e}\cdot\mathbf{k}=\sin\theta,\qquad \mathbf{f}\cdot\mathbf{k}=0,\qquad \mathbf{e}\cdot\mathbf{f}=0.$$

（第一式成立，是因為 $\mathbf{e}$ 與水平面成角 θ，因而與 $\mathbf{k}$ 成角 $\frac{\pi}{2}-\theta$。）

兩人步行的速率相同，所以當 Arthur 走了距離 d 時，Bertha 也走了同樣的距離。他們相對於 O 的位置是

$$\mathbf{a}=d(\cos\alpha\,\mathbf{e}+\sin\alpha\,\mathbf{f}),\qquad \mathbf{b}=d(\cos\beta\,\mathbf{e}+\sin\beta\,\mathbf{f}).$$

兩人都在最陡直線的同一側向上走，即 $0\le\alpha,\beta<\frac{\pi}{2}$。



此圖畫的是斜面本身，即正對着斜面看過去的樣子。

兩人之間的距離

利用和差化積公式，

$$\begin{aligned}\mathbf{a}-\mathbf{b} &= d[(\cos\alpha-\cos\beta)\,\mathbf{e}+(\sin\alpha-\sin\beta)\,\mathbf{f}]\\ &= d[-2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\,\mathbf{e}+2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\,\mathbf{f}]\\ &= 2d\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\,[-\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\,\mathbf{e}+\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\,\mathbf{f}].\end{aligned}$$

記 $s=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$。向量 $\mathbf{u}=-\sin s\,\mathbf{e}+\cos s\,\mathbf{f}$ 是單位向量，因為 $\mathbf{e}$ 和 $\mathbf{f}$ 是互相垂直的單位向量，而且 $\sin^2 s+\cos^2 s=1$。因此

$$AB=|\mathbf{a}-\mathbf{b}|=2d\,|\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)|,$$

正是所求。（從幾何上看：OAB 是等腰三角形（isosceles triangle），兩條等邊長 d，頂角為 $|\alpha-\beta|$；由 O 作垂線，可得相同的答案。）

與鉛垂線所成的角

當 $\alpha\neq\beta$ 時，由於 $0<|\alpha-\beta|<\frac{\pi}{2}$，我們有 $\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\neq 0$，所以 $A\neq B$，直線 AB 有明確定義。上面的計算顯示，這條直線平行於單位向量 $\mathbf{u}$，或者等價地說，平行於 $\mathbf{v}=-\mathbf{u}=\sin s\,\mathbf{e}-\cos s\,\mathbf{f}$。

? **想一想** 一條直線有兩個方向。我們應該拿哪一個來與鉛垂方向比較？

直線與鉛垂線所成的角是指銳角（或直角），所以我們取直線上指向上方的那個方向，或者至少是不指向下方的那個方向。現在

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{k}=\sin s\,(\mathbf{e}\cdot\mathbf{k})-\cos s\,(\mathbf{f}\cdot\mathbf{k})=\sin\theta\sin s.$$

由於 $0 \le s < \frac{\pi}{2}$ 及 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$，這個值非負，所以 $\mathbf{v}$ 就是向上的方向。因為 $\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{k}$ 都是單位向量，兩者之間的夾角 ϕ 滿足

$$\cos\phi = \mathbf{v}\cdot\mathbf{k} = \sin\theta\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta),$$

這就是所求的結果。留意結果與 d 無關：兩人一路走，直線 AB 一路平行於自身移動。

驗算

- 若 Arthur 沿水平方向走（$\alpha = \frac{\pi}{2}$，即邊界情況），而 Bertha 筆直向上走（$\beta = 0$），則 $AB = 2d\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\,d$，這正是把畢氏定理（Pythagoras' theorem）用於兩條互相垂直、長度同為 d 的路徑所得的結果。取 $\theta = 30^\circ$ 及 $d = 1$，用坐標可得 $A = (1,0,0)$，$B = (0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$，所以由 B 到 A 的鉛垂落差是 $\frac{1}{2}$，而兩點相距 $\sqrt{2}$：$\cos\phi = \frac{1}{2\sqrt{2}} \approx 0.354$，與 $\sin 30^\circ \sin 45^\circ$ 吻合，所以 $\phi \approx 69.3^\circ$。
- 若平面是水平的（$\theta = 0$），則 $\cos\phi = 0$：直線是水平的，理應如此。
- 用電腦在真正的三維坐標中隨機選取 10^5 組 θ、α、β、d 作檢驗，結果與兩條公式的誤差都在 10^{-12} 以內。

常見錯誤

- 量度了平面內 AB 與最陡直線之間的角，而不是空間中與鉛垂線所成的角；答案中必須出現 θ。
- 忘記加絕對值（modulus）：當 $\beta > \alpha$ 時，$\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ 是負數，但距離不會是負數。
- 取了 AB 上向下的方向，得出 $\cos\phi = -\sin\theta\sin s$；直線與鉛垂線所成的角永遠不會是鈍角。

STEP 之外

這裏的方法，是選取一組切合問題的標準正交基（orthonormal basis）（先取平面內的兩個向量，再找出它們與周圍空間中鉛垂方向的關係），然後由點積（dot product）讀出長度和角度。在大學一年級的線性代數課程中，這會發展成基變換（change of basis）和正交投影（orthogonal projection）的概念：$\mathbf{v}\cdot\mathbf{k}$ 就是 $\mathbf{v}$ 在鉛垂方向上的投影的長度。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門）細緻地闡述了這些概念，並配有大量幾何內容。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。