詳細解答

STEP I 2000，第 4 題

純數學 • 積分的界限

> **STEP I 2000，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/00-s1-q4

關鍵思路

用初等方法難以直接對 $1/(x^2+1)^4$ 積分，所以題目把它拆成兩部分：一部分恰好是某個函數的導數（exact derivative），積分時不費吹灰之力；另一部分是很小的餘項。第 (ii) 部分負責建立這個分拆，第 (i) 部分則提供餘項的上界。要估計一個積分的界（bound），通常的做法是先估計被積函數（integrand）的界，再乘以區間的長度。

解答

第 (i) 部分

設 $f(x) = \dfrac{x^6}{(x^2+1)^4}$。由於 f 只取決於 x^2，令 $t = x^2$，則 t 與 x 一樣在 $[0,1]$ 上取值，並且 $f = g(t)$，其中

$$g(t) = \frac{t^3}{(1+t)^4}.$$

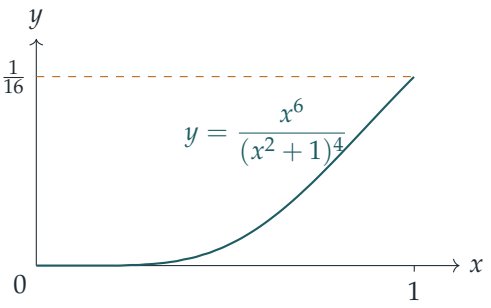
由商法則（quotient rule），

$$g'(t) = \frac{3t^2(1+t)^4 - 4t^3(1+t)^3}{(1+t)^8} = \frac{t^2(3(1+t)-4t)}{(1+t)^5} = \frac{t^2(3-t)}{(1+t)^5}.$$

當 $0 < t \le 1$ 時，每個因子都是正數（特別地，$3-t \ge 2$），所以 $g'(t) > 0$，而 g 在 $[0,1]$ 上嚴格遞增（strictly increasing）。因此它的最大值在 $t = 1$ 處取得，即 $x = 1$：

$$f(1) = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16},$$

這正是所要證明的。此外，處處都有 $f(x) \ge 0$，而最小值是 $f(0) = 0$。



第 (ii) 部分

用商法則對括號內的式子求導。設 $N = Ax^5 + Bx^3 + Cx$，分母為 $(x^2+1)^3$，其導數為 $6x(x^2+1)^2$，於是可以約去一個因子 $(x^2+1)^2$：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{N}{(x^2+1)^3}\right) = \frac{(5Ax^4+3Bx^2+C)(x^2+1) - 6x(Ax^5+Bx^3+Cx)}{(x^2+1)^4}.$$

展開分子，並按 x 的冪次整理：

$$\begin{aligned} &5Ax^6 + 5Ax^4 + 3Bx^4 + 3Bx^2 + Cx^2 + C - 6Ax^6 - 6Bx^4 - 6Cx^2 \\ &\quad = -Ax^6 + (5A-3B)x^4 + (3B-5C)x^2 + C. \end{aligned}$$

現在各項的分母都是 $(x^2+1)^4$，所以恆等式（identity）對所有 x 成立，當且僅當兩邊的分子作為多項式相等：

$$(D-A)x^6 + (5A-3B)x^4 + (3B-5C)x^2 + C = 1.$$

由低次項起逐項比較係數（comparing coefficients）：$C = 1$；然後 $3B - 5C = 5$；然後 $5A - 3B = 5$；最後 $D = A$。所以

$$A = 1, \qquad B = \tfrac{5}{3}, \qquad C = 1, \qquad D = 1.$$

第 (iii) 部分

把第 (ii) 部分的恆等式在 $[0,1]$ 上積分。右邊第一項恰好是一個導數，所以

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^4} &= \left[\frac{x^5 + \frac{5}{3}x^3 + x}{(x^2+1)^3}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{x^6}{(x^2+1)^4}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1 + \frac{5}{3} + 1}{8} - 0 + J = \frac{11}{24} + J, \end{aligned}$$

其中 $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^6}{(x^2+1)^4}\,\mathrm{d}x$。

想一想 怎樣才能不用算出 J 而估計它的界？

由第 (i) 部分，J 的被積函數滿足 $0 \le f(x) \le \frac{1}{16}$，對 $[0,1]$ 內的每個 x 都成立。把這些不等式在長度為 1 的區間上積分，得

$$0 \le J \le \frac{1}{16} \times 1 = \frac{1}{16}.$$

各項同時加上 $\frac{11}{24}$，

$$\frac{11}{24} \le \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^4} \le \frac{11}{24} + \frac{1}{16},$$

這就是所求的結果。（其實兩個不等式都是嚴格的，因為 f 連續，而且並非在整個區間上都等於任何一個界，但題目只要求證明 $\le$。）

驗算

- 把 $x = 0$ 代入第 (ii) 部分的恆等式：導數項等於 $C = 1$，而含 D 的項為零，得 $1 = 1$。當 $x = 1$ 時，導數的分子是 $-1+0+0+1 = 0$，所以恆等式變成 $\frac{1}{16} = \frac{D}{16}$，與 $D = 1$ 吻合。
- 在數值上，用森遜法則（Simpson's rule）可得 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^4} \approx 0.47460$，穩穩落在 $\frac{11}{24} \approx 0.45833$ 與 $\frac{11}{24} + \frac{1}{16} \approx 0.52083$ 之間。餘項 $J \approx 0.01627$ 遠小於 $\frac{1}{16}$，因為 f 除了在 $x = 1$ 附近之外都非常小。

常見錯誤

- 使用商法則時忘記約去公因子 $(x^2+1)^2$，結果分母變成 $(x^2+1)^6$，令比較係數的工作變得一團糟。
- 在第 (i) 部分，只檢查 $x = 1$ 是駐點（stationary point）或端點（endpoint）：你必須證明 f 是遞增的（或比較所有可能的點），才能斷定端點的值是最大值。

STEP 之外

代換(substitution)$x = \tan\theta$ 可把這個積分化為 $\int_0^{\pi/4} \cos^6\theta \,\mathrm{d}\theta$，再用歸約公式(reduction formula）便可求出準確值：其值為 $\frac{11}{48} + \frac{5\pi}{64}$，與我們的數值估計吻合。把被積函數拆成「一個導數加上一個很小的量」，正是歸約公式背後的想法；而透過估計被積函數的界來估計積分的界，則是實分析（real analysis）中最基本的估計方法。Bartle 與 Sherbert 合著的 *Introduction to Real Analysis*（實分析入門）對這些估計有嚴謹細緻的闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。