詳細解答

STEP I 2000，第 3 題

純數學 • 階梯函數的積分

STEP I 2000，第 3 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/00-s1-q3

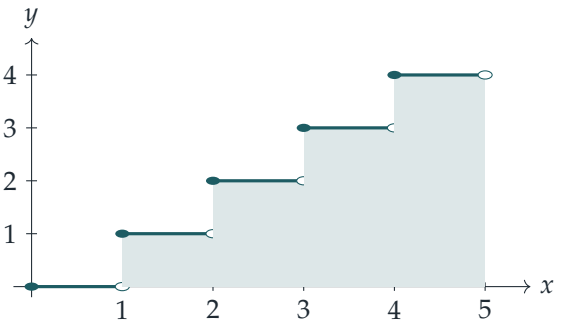
關鍵思路

任何量的整數部分（integer part）都是一個階梯函數（step function）：它在各個區間上保持不變，然後向上跳升一。因此這個積分不過是若干個長方形面積之和，真正要做的工夫只是找出每一級由哪裏開始、到哪裏結束。對於 $[\mathrm{e}^x]$，跳躍發生在 e^x 越過整數之處，即 $x = \ln k$，而由此得出的對數之和恰好可以逐項相消（telescope）。

解答

$y = [x]$ 的圖像

在每個區間 $k \le x < k+1$（其中 k 為整數）上，我們有 $[x] = k$。所以圖像是由水平線段組成的階梯，每段長度為 1，左端是實心點（函數取到該值），右端是空心點（函數在該處向上跳升 1）。



積分就是陰影部分的面積，由闊度為 1、高度分別為 $0, 1, 2, 3, 4$ 的長方形組成（函數在

$x = 1, 2, 3, 4$ 這幾個單獨的點上的取值對面積毫無影響）。因此

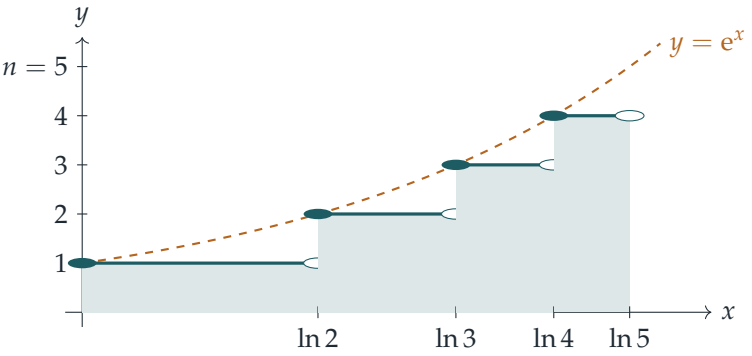
$$\int_0^5 [x]\,\mathrm{d}x = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10.$$

$y = [\mathrm{e}^x]$ 的圖像

當 $0 \le x < \ln n$ 時，我們有 $1 \le \mathrm{e}^x < n$。由於 e^x 是遞增的，

$$[\mathrm{e}^x] = k \iff k \le \mathrm{e}^x < k+1 \iff \ln k \le x < \ln(k+1),$$

其中 $k = 1, 2, \ldots, n-1$。所以圖像仍然是每級高度為 1 的階梯，但現在各級隨着 x 增大而愈來愈短：高度為 k 的那一級闊度為 $\ln(k+1) - \ln k = \ln(1 + \frac{1}{k})$。下面的草圖所示為 $n = 5$ 的情況，曲線 $y = \mathrm{e}^x$ 以虛線表示；階梯在每一級的左端與曲線相接。



積分

把各長方形的面積相加，即高度 k 乘以闊度 $\ln(k+1) - \ln k$，

$$\int_0^{\ln n} [\mathrm{e}^x]\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n-1} k(\ln(k+1) - \ln k) = \sum_{k=1}^{n-1} k\ln(k+1) - \sum_{k=1}^{n-1} k\ln k.$$

? **想一想** 怎樣才能令這兩個和互相抵消？

每個 $\ln j$ 在兩個和中都會出現，只是係數不同。在第一個和中代入 $j = k+1$，便可把兩者對齊：

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} k\ln(k+1) - \sum_{k=1}^{n-1} k\ln k &= \sum_{j=2}^{n}(j-1)\ln j - \sum_{j=1}^{n-1} j\ln j \\ &= (n-1)\ln n + \sum_{j=2}^{n-1}((j-1)-j)\ln j - 1\cdot\ln 1 \\ &= (n-1)\ln n - \sum_{j=2}^{n-1}\ln j.\end{aligned}$$

這裏我們從第一個和中抽出 $j = n$ 的一項，並從第二個和中抽出 $j = 1$ 的一項（該項為零，因為 $\ln 1 = 0$）。現在 $\sum_{j=2}^{n-1} \ln j = \ln((n-1)!)$，而 $(n-1)\ln n = n\ln n - \ln n$，所以

$$\int_0^{\ln n} [\mathrm{e}^x]\,\mathrm{d}x = n\ln n - (\ln n + \ln((n-1)!)) = n\ln n - \ln(n!),$$

正是所求。（當 $n = 1$ 時，積分區間的長度為零，等式兩邊都是 0。）

圖像證明（選讀）

闊度為 $\ln n$、高度為 n 的長方形，面積是 $n\ln n$。它位於階梯上方的部分，由高度為 1 的水平長條組成：在高度 $m-1$ 與 m 之間，其中 $m = 1, \ldots, n$，長條由 $x = 0$ 伸延至 $x = \ln m$，因為 $[\mathrm{e}^x] < m$ 恰好在 $x < \ln m$ 時成立。這長條的面積是 $\ln m$，所以階梯上方區域的面積為 $\ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n = \ln(n!)$。從 $n\ln n$ 中減去它，便再次得到所求結果。這就是「改為對 y 而不是對 x 積分」的離散版本。

驗算

當 $n = 2$ 時，階梯只是一個高度為 1、闊度為 $\ln 2$ 的長方形，而公式給出 $2\ln 2 - \ln 2 = \ln 2$。當 $n = 4$ 時，公式給出 $4\ln 4 - \ln 24 \approx 2.3671$；以中點法則（midpoint rule）計算 $\int_0^{\ln 4} [\mathrm{e}^x]\,\mathrm{d}x$，結果與之吻合至小數點後五位，而對於直至 8 的每一個 n 亦然。答案還必須小於 $\int_0^{\ln n} \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = n - 1$，因為階梯位於曲線之下：當 $n = 4$ 時，$2.37 < 3$。

常見錯誤

- 把高度為 k 的那一級的闊度當作 1（照搬第一部分），而不是 $\ln(k+1) - \ln k$。
- 讓階梯由高度 0 開始：在 $0 \le x < \ln n$ 上我們有 $\mathrm{e}^x \ge 1$，所以最低的一級位於高度 1。
- 移動求和指標時出錯，漏掉了 $(n-1)\ln n$ 這一項；或者沒有留意到它必須與 $\ln((n-1)!)$ 合併，才能得出 $\ln(n!)$。

STEP 之外

由於階梯位於 $y = \mathrm{e}^x$ 之下，積分小於 $n-1$，整理後即得 $\ln(n!) > n\ln n - n + 1$。以同樣的方法從上方給階梯定界，便會通往斯特靈公式（Stirling's formula）$\ln(n!) \approx n\ln n - n$，這是分析學、概率論和組合數學中的一個關鍵估計。由長方形之和轉換為長條之和，也是「分部求和法」（summation by parts）的一個例子，它是分部積分法（integration by parts）在離散情況下的近親。若想為階梯函數的積分建立嚴格的基礎，Abbott 的

Understanding Analysis（分析學入門讀本）是下一步的好選擇。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。