詳細解答

STEP I 2000，第 2 題

純數學 • 二項展開式的係數

> **STEP I 2000，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/00-s1-q2

關鍵思路

把兩個帶分式項的二項式（binomial）直接展開，再逐一尋找相配的冪，過程相當繁瑣。較簡潔的做法是先把 x 的負數冪抽出來，令每個括號都變成只含 x 的單一種冪（x^6 或 x^2）的多項式（polynomial）。這樣一來，憑着因式分解（factorisation）$x^6-1=(x^2-1)(x^4+x^2+1)$，便會發現第二個乘積其實就是第一個乘積的化身，所以題目中「由此」（hence）的部分幾乎不費工夫。

解答

第一個展開式

從每個括號中抽出 x 的最低次冪，

$$\left(x^4-\frac{1}{x^2}\right)^5=\left(\frac{x^6-1}{x^2}\right)^5=x^{-10}\,(x^6-1)^5,$$
$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^6=\left(\frac{x^2-1}{x}\right)^6=x^{-6}\,(x^2-1)^6.$$

因此整個算式等於 $x^{-16}P(x)$，其中

$$P(x)=(x^6-1)^5\,(x^2-1)^6.$$

所以原展開式中 x^n 的係數（coefficient），就是多項式 $P(x)$ 中 x^{n+16} 的係數。

根據二項式定理（binomial theorem），

$$(x^6-1)^5=\sum_{j=0}^{5}\binom{5}{j}(-1)^{5-j}x^{6j},\qquad (x^2-1)^6=\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}(-1)^{6-k}x^{2k},$$

故此 $P(x)$ 中 x^m 的係數，就是

$$\binom{5}{j}(-1)^{5-j}\binom{6}{k}(-1)^{6-k}$$

對所有符合 $6j+2k=m$、$0\le j\le 5$、$0\le k\le 6$ 的數對求和的結果。

x^{-12} 的係數。 我們需要 $m=-12+16=4$，即 $6j+2k=4$。由於 $6j\le 4$，必有 $j=0$，所以唯一的數對是 $(j,k)=(0,2)$，得出

$$\binom{5}{0}(-1)^5\cdot\binom{6}{2}(-1)^4=(-1)(15)=-15,$$

正如題目所求。

x^2 的係數。 這次 $m=2+16=18$，所以 $6j+2k=18$，即 $3j+k=9$，而 $k\le 6$。這容許 $j=1,2,3$：

(j,k)	來自 $(x^6-1)^5$	來自 $(x^2-1)^6$	乘積
$(3,0)$	$\binom{5}{3}(-1)^2=10$	$\binom{6}{0}(-1)^6=1$	10
$(2,3)$	$\binom{5}{2}(-1)^3=-10$	$\binom{6}{3}(-1)^3=-20$	200
$(1,6)$	$\binom{5}{1}(-1)^4=5$	$\binom{6}{6}(-1)^0=1$	5

所以 x^2 的係數是 $10+200+5=215$。

> ? **想一想** 為甚麼 $j=0$ 或 $j=4$ 不可能對 x^{18} 有貢獻？

若 $j=0$，便需要 $k=9$；若 $j=4$，便需要 $k=-3$；兩者都不在 $0\le k\le 6$ 的範圍內。在這一步很容易漏掉某個數對（或者憑空多出一個），所以有系統地列出所有可能情況是值得的。

第二個展開式

> ? **想一想** x^4+x^2+1 與第一部分有甚麼關係？

把 x^6-1 看成以 x^2 表示的立方差（difference of cubes）時，它就是另一個因式：

$$x^6-1=(x^2)^3-1=(x^2-1)(x^4+x^2+1).$$

把 $(x^2-1)^{11}$ 拆成 $(x^2-1)^5(x^2-1)^6$，

$$(x^2-1)^{11}(x^4+x^2+1)^5=[(x^2-1)(x^4+x^2+1)]^5(x^2-1)^6=(x^6-1)^5(x^2-1)^6=P(x).$$

所以第二個展開式正正就是 $P(x)$，即第一個展開式乘以 x^{16}。

x^4 的係數。 這就是 $P(x)$ 中 x^4 的係數，我們在上面已經求得（它對應第一個展開式中的 x^{-12}）。答案是 -15。

x^{38} 的係數。 這對應 $6j+2k=38$，即 $3j+k=19$，而 $j\le 5$、$k\le 6$。由於 $k\le 6$，我們需要 $3j\ge 13$，所以 $j=5$、$k=4$，得出

$$\binom{5}{5}(-1)^0\cdot\binom{6}{4}(-1)^2=15.$$

所以 x^{38} 的係數是 15。

其實有一個巧妙的方法，不用點算也能看出這個結果。P 的次數（degree）是 $30+12=42$，而把 x 換成 $1/x$ 可得

$$x^{42}P(1/x)=(1-x^6)^5(1-x^2)^6=(-1)^{11}P(x)=-P(x).$$

比較係數可知，P 中 x^{42-m} 的係數等於 x^m 的係數的負數。取 $m=4$，x^{38} 的係數就是 $-(-15)=15$，與上面的結果吻合。

驗算

- 把 $x=1$ 代入 $P(x)$：其值為零，所以 P 的所有係數之和是 0。如果你把它完全展開，這是一個快捷的合理性檢查。
- 我們用電腦把兩個乘積精確地乘開（以係數列表的形式）。在第一個乘積中，x^{-12} 的係數是 -15，x^2 的係數是 215；在第二個乘積中，x^4 的係數是 -15，x^{38} 的係數是 15。我們亦確認了第二個乘積的次數是 42，並且等於第一個乘積乘以 x^{16}。
- 把隨機選取的有理數值代入原式中的 x，所得結果與計算出來的展開式完全吻合。

常見錯誤

- 正負號出錯：若選取的冪是 x^{6j} 和 x^{2k}，該項的正負號是 $(-1)^{5-j}(-1)^{6-k}=-(-1)^{j+k}$，而不是 $(-1)^{j+k}$。用錯了的話，每個答案的正負號都會顛倒。
- 計算 x^2 的係數時漏掉 $(1,6)$ 或 $(3,0)$ 這兩項，結果得出 200 或 205。
- 沒有留意到因式分解，直接展開 $(x^2-1)^{11}(x^4+x^2+1)^5$：這樣做是可行的，但冗長而且容易出錯。

STEP 之外

把多個和式的乘積寫成單一個和式，再從中抽出 x 的某一個冪，正是生成函數（generating function）背後的想法。乘積中的某個係數，數算的是由各部分湊出某個總數的方法數目，與我們在上面點算數對 (j,k) 的做法如出一轍。對稱關係 $x^{42}P(1/x) = -P(x)$ 說明 P 是一個（反）迴文多項式（(anti)palindromic polynomial）；這類多項式會在分圓多項式（cyclotomic polynomial）和單位根（roots of unity）的研究中出現，而 $x^6 - 1$ 正是其中最初步的例子。想做更多同類風格的題目，Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 是很好的下一步；而 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups* 則對多項式的因式分解有完整而嚴謹的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。