詳細解答

STEP I 2000，第 14 題

概率與統計 • 均勻分佈的矩

> **STEP I 2000，第 14 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/00-s1-q14

關鍵思路

這裏的一切都是均勻分佈（uniform distribution）的矩（moment），而 X 在 $[-1,1]$ 上的矩很容易計算：奇數階的矩因對稱性而等於零，偶數階的矩則為 $1/(k+1)$。至於 $Z = Y - X$，我們根本不需要知道 Z 的分佈。把 $(Y-X)^2$ 和 $(Y-X)^4$ 按二項式展開，再利用獨立性（independence），每個期望值（expectation）都化為我們已知的矩的乘積。

解答

X 的矩

X 在 $[-1,1]$ 上的密度（density）為 $\frac{1}{2}$，所以對非負整數 k，

$$\mathrm{E}(X^k) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^k \,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & k \text{ 為奇數（被積函數是奇函數）}, \\ \dfrac{1}{k+1}, & k \text{ 為偶數}. \end{cases}$$

特別地，$\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(X^3) = 0$，$\mathrm{E}(X^2) = \frac{1}{3}$，而 $\mathrm{E}(X^4) = \frac{1}{5}$。因此

$$\mathrm{E}(X^2) = \frac{1}{3}, \qquad \mathrm{Var}(X^2) = \mathrm{E}(X^4) - (\mathrm{E}(X^2))^2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{9} = \frac{4}{45}.$$

Y 的分佈相同，所以它的矩也相同。

Z^2 的平均值

展開得 $Z^2 = Y^2 - 2XY + X^2$。由於 X 和 Y 獨立，$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) = 0$，所以

$$\mathrm{E}(Z^2) = \frac{1}{3} - 0 + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Z^2 的方差

我們需要 $\mathrm{E}(Z^4)$。根據二項式定理（binomial theorem），

$$Z^4 = (Y-X)^4 = Y^4 - 4Y^3X + 6Y^2X^2 - 4YX^3 + X^4.$$

> **想一想** 我們真的可以把 Y^3X 的期望值寫成 $\mathrm{E}(Y^3)\,\mathrm{E}(X)$ 嗎？

可以：因為 X 和 Y 獨立，所以它們的任何函數（例如 Y^3 和 X）也獨立，而獨立隨機變量（random variable）之積的期望值等於各自期望值之積。中間兩個交叉項各含有 X 或 Y 的奇數次冪，所以它們的期望值都是零。因此

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Z^4) &= \mathrm{E}(Y^4) + 6\,\mathrm{E}(Y^2)\,\mathrm{E}(X^2) + \mathrm{E}(X^4)\\ &= \frac{1}{5} + 6\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5} + \frac{2}{3} = \frac{16}{15}.\end{aligned}$$

所以

$$\mathrm{Var}(Z^2) = \mathrm{E}(Z^4) - (\mathrm{E}(Z^2))^2 = \frac{16}{15} - \frac{4}{9} = \frac{48-20}{45} = \frac{28}{45}.$$

由於 $\frac{28}{45} = 7\times\frac{4}{45}$，我們得到 $\mathrm{Var}(Z^2) = 7\,\mathrm{Var}(X^2)$，這正是所要證明的。

驗算

- Z 在 $[-2,2]$ 上有三角形密度 $f(z) = \frac{1}{4}(2-|z|)$。直接計算，$\mathrm{E}(Z^4) = 2\int_0^2 \frac{1}{4}z^4(2-z)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\left(\frac{64}{5} - \frac{32}{3}\right) = \frac{16}{15}$，與展開所得的結果一致。
- $\mathrm{E}(Z^2) = \mathrm{Var}(Y-X) = \mathrm{Var}(Y) + \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$，因為 $\mathrm{E}(Z) = 0$。
- 模擬一百萬對 (X,Y)，得出 $\mathrm{Var}(X^2) \approx 0.0889$ 和 $\mathrm{Var}(Z^2) \approx 0.623$，而理論值為 $4/45 \approx 0.0889$ 和 $28/45 \approx 0.622$。

常見錯誤

- 寫成 $\mathrm{Var}(Z^2) = \mathrm{Var}(Y^2) + \mathrm{Var}(X^2)$。這樣做忽略了 Z^2 內的 $-2XY$ 一項，它的平均值雖然是零，卻貢獻了 $4\,\mathrm{Var}(XY) = \frac{4}{9} = \frac{20}{45}$；這個錯誤會得出 $\frac{8}{45}$，而不是 $\frac{28}{45}$。
- 忘記了 Y^2X^2 一項的二項式係數 6。
- 在 $[-1,1]$ 上把密度當作 1 而不是 $\frac{1}{2}$，結果每個矩都變成兩倍。

STEP 之外

$\mathrm{E}(X^k)$ 這些量就是 X 的矩，而處理獨立變量之和的簡潔方法是矩母函數（moment generating function）$M_X(t) = \mathrm{E}(\mathrm{e}^{tX})$，它滿足 $M_{Y-X}(t) = M_Y(t)M_X(-t)$。把這個乘積展開成 t 的冪級數（power series），就可以一次過得到 Z 的所有矩。矩母函數和特徵函數（characteristic function）是大學第一門概率課程的核心內容：它們是證明中心極限定理（central limit theorem）的主要工具。Grimmett 與 Welsh 所著的 *Probability: An Introduction*（概率論入門教材）對這些內容有清晰的闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。