詳細解答

# STEP I 2000，第 11 題

力學 • 梯子的摩擦力平衡

> **STEP I 2000，第 11 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/00-s1-q11

## 關鍵思路

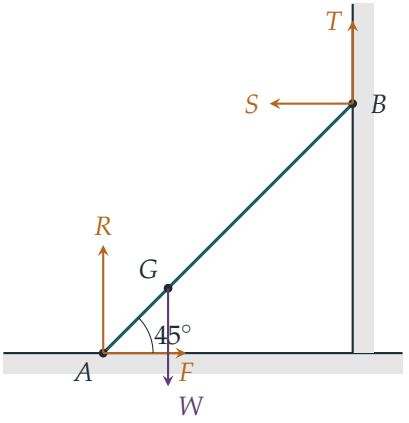
這是一道兩端都有摩擦力的梯子問題。「在 $A$ 和 $B$ 兩處同時達到極限」這個條件，令每個摩擦力（frictional force）都可以用對應的法向反作用力（normal reaction）表示，於是兩條分解力的方程便決定了全部四個接觸力。這樣一來，力矩（moment）方程就成了多出來的一個條件：它要麼碰巧成立，要麼不成立。在第一部分，我們證明它不成立。在第二部分，我們把額外質量的位置當作未知數，令它成立。

## 解答

### 模型與方程

我們把桿看成一根剛性桿（rigid rod），其重量 $W = 5g\,\mathrm{N}$ 作用於 $G$。$A$（地面）和 $B$（牆壁）兩處的接觸面都是粗糙的。各個力如下：

- 在 $A$：法向反作用力 $R$ 向上，摩擦力 $F$ 沿水平方向；
- 在 $B$：法向反作用力 $S$ 沿水平方向離開牆壁，摩擦力 $T$ 沿鉛垂方向（取向上為正，所以 $T < 0$ 即表示向下）；
- 重量 $W$ 在 $G$ 處向下。




水平方向的力只有 $F$ 和 $S$，而 $S \geq 0$ 把桿推離牆壁。所以 $F$ 必須指向牆壁，並且

$$F = S. \tag{1}$$

沿鉛垂方向分解，

$$R + T = W. \tag{2}$$

對 $A$ 取力矩時，設 $AB = 0.81$，$c = \cos 45^\circ = \sin 45^\circ$。那麼 $B$ 與 $A$ 的水平距離是 $0.81c$，高度也是 $0.81c$，而 $G$ 與 $A$ 的水平距離是 $0.21c$。比較順時針和逆時針方向的力矩，

$$S\,(0.81c) + T\,(0.81c) = W\,(0.21c),$$

約去 $c$ 後得

$$0.81\,(S + T) = 0.21\,W. \tag{3}$$

45° 的好處就在這裏：因子 $c$ 可以從每一項中約去。

### 摩擦力不可能在兩端同時達到極限

假設摩擦力在兩端都達到極限。那麼 $F = 0.2R$，而 $|T| = 1.0\,S = S$。

> **想一想** 當 $B$ 處的摩擦力達到極限時，它指向哪個方向？

最自然的情況是桿即將滑動，$A$ 遠離牆壁而 $B$ 向下滑，這時 $T = +S$。為求周全，我們把兩種符號都檢查一遍。

情況 $T = S$。由 (1)，$S = F = 0.2R$，而 (2) 給出 $R + 0.2R = W$。所以 $R = \frac{5}{6}W$，$S = T = \frac{1}{6}W$。於是 (3) 的左方是

$$0.81\left(\tfrac{1}{6}W + \tfrac{1}{6}W\right) = 0.27\,W \neq 0.21\,W.$$

所以力矩方程不成立。

情況 $T = -S$。(3) 的左方是 0，但右方是 $0.21W > 0$，這是不可能的。

在兩種情況下，桿都不可能處於平衡（equilibrium）。所以摩擦力不可能在 $A$ 和 $B$ 兩處同時達到極限，這正是所要證明的。

（在非極限的情況下，平衡當然是可能的：例如 $T = S = \frac{7}{54}W$ 滿足 (3)，並給出 $R = \frac{47}{54}W$，而且 $F = S \leq 0.2R$。）

### 在 $P$ 加上質量

設 $AP = x\,\mathrm{m}$。額外的重量同樣是 $W = 5g\,\mathrm{N}$，作用於 $P$，所以總重量是 $2W$。方程 (1) 和 (2) 變成

$$F = S, \qquad R + T = 2W,$$

而對 $A$ 的力矩方程多了一項 $W\,(xc)$。約去 $c$ 後，它變成

$$0.81\,(S + T) = 0.21\,W + x\,W. \tag{4}$$

現在摩擦力在兩端都達到極限。$T = -S$ 的情況同樣不可能，因為這時 (4) 的左方是 0，右方卻是正數。所以 $T = S$ 且 $F = 0.2R$，因此

$$S = 0.2R, \qquad R + 0.2R = 2W \quad \Longrightarrow \quad R = \tfrac{5}{3}W, \quad S = T = \tfrac{1}{3}W.$$

代入 (4) 得

$$0.81 \times \tfrac{2}{3}\,W = 0.54\,W = 0.21\,W + x\,W,$$

所以 $x = 0.33$。因此

$$AP = 0.33\,\mathrm{m}.$$

這個值介乎 0 與 0.81 之間，所以 $P$ 在桿上。它在 $G$ 之外（也在中點之外），所以額外的質量把合重心（centre of gravity）沿桿向上推，而這往往會令梯子滑倒。

## 驗算

- 質量放在 $P$ 時，以 $W$ 為單位，各力為 $R = \frac{5}{3}$ 和 $F = S = T = \frac{1}{3}$。於是 $F/R = 0.2$，$T/S = 1$，所以兩處都達到極限。鉛垂方向有 $\frac{5}{3} + \frac{1}{3} = 2$，而力矩給出 $0.81 \times \frac{2}{3} = 0.54 = 0.21 + 0.33$。
- 合重心與 $A$ 的距離是 $\frac{1}{2}(0.21 + 0.33) = 0.27\,\mathrm{m}$。這正是第一部分中，要令摩擦力在兩端同時達到極限所需的位置（$0.27W$ 對比 $0.21W$）。這是合理的，因為摩擦係數不變，只是總重量增加了一倍。
- 質量和 $g$ 在整個計算中都會約去，所以答案與它們無關。以 $g = 9.8$ 和真正的 45° 力矩作數值代入，所得殘差的數量級為 $10^{-15}$。

## 常見錯誤

- 把 $A$ 處摩擦力的方向取錯。由於 $S$ 是另外唯一的水平力，$F$ 必須指向牆壁。
- 忘記 $B$ 處的摩擦力是沿鉛垂方向的，所以它會出現在鉛垂方向的分解式中，令 $R$ 小於總重量。
- 用了桿的中點而不是 $G$。這根桿並不均勻。

## STEP 之外

平面上的剛體（rigid body）給出三條平衡方程，所以一道有四個未知接觸力的問題是靜不定(statically indeterminate)的。單靠剛體靜力學，無法得知摩擦力怎樣在兩端之間分配。加上「在兩端同時達到極限」這個條件，就多了兩條方程，令方程組變成超定（over-determined），而這正是第一部分無解的原因。在工程學上，靜不定的問題是透過為接觸點的彈性建立模型來解決的。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）以大學一年級的程度，仔細討論了剛體靜力學和摩擦力。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。