詳細解答

STEP I 2000，第 10 題

力學 • 碰撞與恢復係數

> **STEP I 2000，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/00-s1-q10

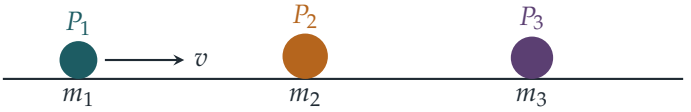
關鍵思路

每次碰撞都給我們兩條方程：動量守恆（conservation of momentum）和牛頓恢復定律（Newton's law of restitution）。這裏碰撞的結果已部分知道（P_1 停下；P_3 以速率 v 離開），所以我們不是求各個速度，而是求未知的係數。可行條件則來自任何恢復係數（coefficient of restitution）都必須符合的唯一物理限制 $0 \le e \le 1$，而最終能量成為唯一可自由變動的質量 m_2 的函數，我們在這些條件所容許的區間上求它的最大值和最小值。

解答

模型

我們把三個物體視為在光滑桌面上沿同一直線運動的質點（particle），因此沒有水平外力作用，每次碰撞中動量都守恆。取 P_1 初始運動的方向為正方向。



第一次碰撞

設 P_2 以速度 u 離開。由於 P_1 變為靜止，

$$\begin{aligned} \text{動量：} \quad & m_1 v = m_2 u \quad \Longrightarrow \quad u = \frac{m_1 v}{m_2}, \\ \text{恢復定律：} \quad & u - 0 = e(v - 0) \quad \Longrightarrow \quad e = \frac{u}{v} = \frac{m_1}{m_2}. \end{aligned}$$

第二次碰撞

P_2 現在以速率 u 撞向靜止的 P_3。設 P_2 碰撞後的速度為 w；題目告訴我們 P_3 的速度為 v。由動量守恆得

$$m_2u = m_2w + m_3v \quad\Longrightarrow\quad m_1v = m_2w + m_3v \quad\Longrightarrow\quad w = \frac{(m_1 - m_3)v}{m_2},$$

其中用到第一次碰撞所得的 $m_2u = m_1v$。由恢復定律（分離速率 $= e' \times$ 接近速率）得

$$v - w = e'u.$$

代入 w 和 u，並將全式乘以 m_2/v（它不等於零）：

$$m_2 - (m_1 - m_3) = e'm_1 \quad\Longrightarrow\quad e' = \frac{m_2 + m_3 - m_1}{m_1},$$

這就是所要求的結果。

這樣的碰撞何時可能發生？

任何恢復係數都介乎 0 與 1 之間。應用 $0 \le e' \le 1$，並乘以 $m_1 > 0$：

$$0 \le m_2 + m_3 - m_1 \le m_1 \quad\Longleftrightarrow\quad m_1 \le m_2 + m_3 \le 2m_1,$$

這正是題目要求的不等式。所以它是這些碰撞可能發生的必要條件。

> ? **想一想** 我們是否已用上每一個限制條件？e 又如何？

我們還需要 $0 \le e \le 1$。由於 $e = m_1/m_2$，這個條件成立當且僅當 $m_2 \ge m_1$。這個條件並不屬於題目要求我們證明的結果（事實上，有了它，左邊的不等式 $m_2 + m_3 \ge m_1$ 便自動成立），但它在最後一部分十分重要。綜合以上各點，這些碰撞可能發生當且僅當

$$m_1 \le m_2 \le 2m_1 - m_3.$$

要這個區間非空，我們需要 $m_3 \le m_1$。這時 $w = (m_1 - m_3)v/m_2 \ge 0$，所以第二次碰撞後 P_2 繼續向前運動（或停下），永遠不會回頭撞上靜止的 P_1。同時 $v - w = e'u \ge 0$，所以 P_2 不會再追上 P_3。因此總共只有這兩次碰撞。

最終能量

最後 P_1 靜止，P_2 的速度為 w，P_3 的速度為 v，所以最終動能（kinetic energy）為

$$E = \tfrac{1}{2}m_2w^2 + \tfrac{1}{2}m_3v^2 = \frac{(m_1 - m_3)^2v^2}{2m_2} + \tfrac{1}{2}m_3v^2.$$

當 m_1、m_3 和 v 固定時，只有 m_2 可以變動，範圍是 $m_1 \le m_2 \le 2m_1 - m_3$。第一項是一個非負常數除以 m_2，所以 E 是 m_2 的遞減函數（若 $m_1 = m_3$ 則為常數，不過這時區間本來就只有 $m_2 = m_1$ 這一點）。

最大能量在 $m_2 = m_1$ 時出現（第一次碰撞為完全彈性（perfectly elastic），$e = 1$）：

$$E_{\max} = \frac{(m_1 - m_3)^2 v^2}{2m_1} + \frac{m_3 v^2}{2} = \frac{(m_1^2 - m_1 m_3 + m_3^2)\, v^2}{2m_1}.$$

最小能量在 $m_2 = 2m_1 - m_3$ 時出現（第二次碰撞為完全彈性，$e' = 1$）：

$$E_{\min} = \frac{(m_1 - m_3)^2 v^2}{2(2m_1 - m_3)} + \frac{m_3 v^2}{2} = \frac{(m_1^2 - 2m_1 m_3 + m_3^2 + 2m_1 m_3 - m_3^2) v^2}{2(2m_1 - m_3)} = \frac{m_1^2 v^2}{2(2m_1 - m_3)}.$$

驗算

- 碰撞中能量永遠不會增加，所以我們需要 $E_{\max} \le \frac{1}{2} m_1 v^2$。這即是 $m_1^2 - m_1 m_3 + m_3^2 \le m_1^2$，亦即 $m_3(m_3 - m_1) \le 0$，由於 $m_3 \le m_1$，此式成立。
- 可以驗證 $E_{\max} - E_{\min} = \dfrac{(m_1 - m_3)^3 v^2}{2m_1(2m_1 - m_3)} \ge 0$，而且當 $m_1 = m_3$ 時兩個答案都等於 $\frac{1}{2} m_1 v^2$（這時 $m_2 = m_1$，兩次碰撞都是彈性碰撞，沒有能量損失）。
- 數值驗算：取 $m_1 = 2$、$m_3 = 1$、$v = 1$，初始能量為 1，$E_{\max} = \frac{3}{4}$，$E_{\min} = \frac{2}{3}$。以精確算術讓 m_2 逐步走遍 $[2, 3]$，可重現這兩個極值，並確認 $e, e' \in [0, 1]$ 在整個區間內成立，在區間外則不成立。

常見錯誤

- 在 $m_1 - m_3 \le m_2 \le 2m_1 - m_3$ 上求最大值和最小值（只考慮 e'）。這樣會得出「最大值」$\frac{1}{2} m_1 v^2$，即全部初始能量，但對應的 m_2 值使 $e = m_1 / m_2 > 1$，這是不可能的。
- 把恢復定律弄反了：是分離速率等於 e 乘以接近速率。

STEP 之外

這裏的模式是：每個限制條件為參數劃出一個容許的區間，然後我們在該區間上求一個單調函數的最大值和最小值。這是約束優化（constrained optimisation）最簡單的情形，由此可發展出線性規劃（linear programming）和拉格朗日乘數（Lagrange multipliers）。在物理方面，碰撞在質心參考系（centre-of-mass frame）中簡潔得多：在那裏，恢復係數只是把每個速度乘以 $-e$，而損失的能量為 $\frac{1}{2}\mu(1 - e^2) \times$（相對速率）^{2}，其中 μ 為約化質量（reduced mass）。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）正是以這個觀點闡述碰撞。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。