詳細解答

STEP I 2000，第 1 題

純數學 • 對數與首位數字

> **STEP I 2000，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/00-s1-q1

關鍵思路

一個大數 N 的首位數字（leading digit）完全取決於 $\log_{10} N$ 的小數部分（fractional part）。若 $\log_{10} N = k + f$，其中 k 為整數而 $0 \le f < 1$，則 $N = 10^f \times 10^k$，而 N 的首位數字是 d，當且僅當 $\log_{10} d \le f < \log_{10}(d+1)$。因此我們只需要數字 1 至 9 的對數（logarithm），它們都可由 $\log_{10} 2$ 和 $\log_{10} 3$ 求得；此外還要留心我們能夠容許多大的捨入誤差（rounding error）。

解答

以下 log 一律表示 $\log_{10}$。區間 $[0,1)$ 分成九段，每段對應一個可能的首位數字：



小數部分 f 落在標示為 d 的一段內，首位數字就是 d。

第 (i) 部分

由於 $5 = 10/2$ 及 $6 = 2 \times 3$，

$$\log 5 = 1 - \log 2 = 1 - 0.301029996 = 0.698970004 \approx 0.699,$$
$$\log 6 = \log 2 + \log 3 = 0.301029996 + 0.477121255 = 0.778151251 \approx 0.778,$$

兩者均準確至小數點後三位。

現在

$$\log 3^{100} = 100 \log 3 = 47.7121255.$$

題目所給的 $\log 3$ 的值，誤差不超過 5×10^{-10}，所以上式的誤差不超過 5×10^{-8}；必定有 $47.712 < \log 3^{100} < 47.713$。與

$$\log\left(5 \times 10^{47}\right) = 47 + \log 5 \approx 47.699 \quad \text{及} \quad \log\left(6 \times 10^{47}\right) = 47 + \log 6 \approx 47.778,$$

比較，可得

$$\log\left(5 \times 10^{47}\right) < \log 3^{100} < \log\left(6 \times 10^{47}\right).$$

兩邊的餘裕（約 0.013 和 0.066）遠遠大於任何捨入誤差，而 log 是嚴格遞增（strictly increasing）的，所以

$$5 \times 10^{47} < 3^{100} < 6 \times 10^{47},$$

正如所求。因此 3^{100} 是 $5.\ldots \times 10^{47}$：它的首位數字是 $\boxed{5}$（而且它共有 48 位數字）。

第 (ii) 部分

我們沿用同一個想法，取 $\log 2 = 0.301029996$，其誤差至多為 5×10^{-10}。乘以 10^n 會把這個誤差也乘以 10^n，所以我們必須檢查小數部分是否仍然穩妥地留在數線上的同一段之內。

2^{1000}. $\log 2^{1000} = 301.029996$，誤差至多為 5×10^{-7}。小數部分約為 0.030，介乎 $\log 1 = 0$ 與 $\log 2 \approx 0.301$ 之間，所以 $2^{1000} = 1.\ldots \times 10^{301}$，其首位數字是 $\boxed{1}$。

$2^{10\,000}$. $\log 2^{10\,000} = 3010.29996$，誤差至多為 5×10^{-6}。小數部分介乎 0.299955 與 0.299965 之間。

> ? **想一想** 小數部分 0.29996 非常接近 $\log 2 = 0.30103$。我們能肯定首位數字不是 2 嗎？

能夠：兩者相差 $0.30103 - 0.29996 \approx 0.0011$，是最大可能誤差 5×10^{-6} 的二百多倍。所以小數部分確實小於 $\log 2$，而 $10^{3010} < 2^{10\,000} < 2 \times 10^{3010}$。（等價地，$2^{10\,000} < 2 \times 10^{3010}$ 即是說 $2^{9999} < 10^{3010}$，亦即 $\log 2 < 3010/9999 = 0.3010301\ldots$，而這是成立的。）首位數字是 $\boxed{1}$。

$2^{100\,000}$. $\log 2^{100\,000} = 30102.9996$，誤差至多為 5×10^{-5}，所以小數部分介乎 0.99955 與 0.99965 之間。我們需要知道它落在數線上的哪一段，而最頂的一段始於

$$\log 9 = 2 \log 3 = 0.954242510.$$

由於 $0.954 < 0.99955$ 及 $0.99965 < 1$，我們得到 $9 \times 10^{30102} < 2^{100\,000} < 10^{30103}$，所以首位數字是 $\boxed{9}$。

想一想 誤差會不會把小數部分推過 1，令這個數變成 $1.\ldots \times 10^{30103}$？

除非 $100\,000 \log 2$ 的真確值至少是 30103 才會如此，而這需要它有 0.0004 的誤差，是最大誤差 5×10^{-5} 的八倍。所以首位數字是 9，而 $2^{100\,000}$ 共有 30 103 位數字。

驗算

用電腦作精確的整數運算，可證實以上所有結果：3^{100} 有 48 位數字，開首為 515…；2^{1000} 開首為 107…（共 302 位數字）；$2^{10\,000}$ 開首為 199…（共 3011 位數字）；而 $2^{100\,000}$ 開首為 999…（共 30 103 位數字）。再用一個簡單例子檢驗這個方法是否合理：$\log 2^{10} = 3.0103$ 的小數部分為 $0.0103 < \log 2$，與 $2^{10} = 1024$ 吻合。

常見錯誤

- 從對數的整數部分（integer part）讀出首位數字。整數部分只能告訴我們位數（位數比它多一）；首位數字藏在小數部分之中。
- 忘記乘以 100 000 時，$\log 2$ 的捨入誤差也會同樣被放大。在這裏九位小數僅僅足夠，而且值得說明原因。
- 看見 $f = 0.9996 \approx 1$ 便斷定首位數字是 1。小數部分略小於 1，表示這個數略小於十的某個冪，所以它以 9 開首。

STEP 之外

2^n 的首位數字由 $n \log 2$ 的小數部分決定。由於 $\log 2$ 是無理數（irrational），這些小數部分在 $[0, 1)$ 內是等分佈（equidistributed）的（外爾（Weyl）等分佈定理），所以在 2 的冪之中，以數字 d 開首的所佔比例趨向 $\log(1 + 1/d)$：這就是本福特定律（Benford's law），而大約 30% 的 2 的冪以 1 開首。至於無理性與逼近這方面的故事，達文波特（Davenport）的 *The Higher Arithmetic* 是一本十分值得一讀的好書。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。