9.8 沒有人拿到自己的恤衫

工作紙

題目

STEP II 2016，第 12 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/16-s2-q12

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

> **停一停，試一試**　先試 $n = 3$：列出卡 $1, 2, 3$ 的全部六種次序，數一數其中有多少種是沒有任何一張卡在自己位置上的。如果你有耐性，再試 $n = 4$（共有 24 種次序）。

階段 1　三個事件的容斥原理（inclusion–exclusion）

涵蓋：三個事件，以及四個事件

> **想一想**　把 $A \cup B$ 當作單一事件（event），再與 C 一起套用兩個事件的公式。你會用到 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$。

階段 2 各個概率

涵蓋：第 (i) 至 (iii) 部分

想一想 若第 i 張卡在第 i 個位置，其餘的卡有多少種排列方法？若第 i 張和第 j 張卡都在自己的位置上，又有多少種？

階段 3 全部加起來

涵蓋：至少有一張卡在自己的位置上

停一停，試一試 在 $\mathrm{P}(E_1 \cup \cdots \cup E_n)$ 的公式中，有多少項涉及 k 個事件的交集（intersection）？把項數乘以每一項的概率（probability），然後化簡。幾乎所有東西都會約去。

階段 4　恰好一張

涵蓋：恰好有一張卡在自己的位置上

想一想　先選定哪一張卡在自己的位置上。其餘 $n-1$ 張卡必須怎樣排？把你上一題的答案套用到 $n-1$ 張卡的情況。

背後的數學

e 從何而來

級數 $\sum(-1)^k/k!$ 就是指數級數（exponential series）$e^x=\sum x^k/k!$ 在 $x=-1$ 時的值。所以當 $n\to\infty$ 時，

$$d_n \to e^{-1} \approx 0.3679,$$

而恰好有一張卡對上的概率也趨向同一個極限。收斂（convergence）的速度快得驚人（圖 9.8.1）：在 $1/n!$ 一項停下來所產生的誤差小於 $1/(n+1)!$，所以在 $n=7$ 時，答案已經與 $1/e$ 吻合至小數點後四位。事實上，n 件物件的錯排數目 $n!\,d_n$ 恰好是最接近 $n!/e$ 的整數。

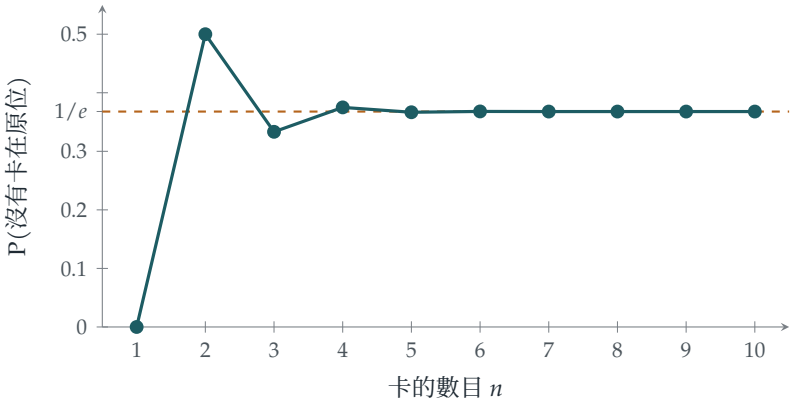

圖 9.8.1　把 n 張卡隨機洗勻後，沒有任何一張卡留在自己位置上的概率。它在 $1/e$ 的上下交替出現，而由 $n = 6$ 開始，在這個比例尺下已經與 $1/e$ 無法分辨。

對上的數目服從泊松分佈

結論還不止於此。設 N 為在自己位置上的卡的數目。那麼對每個 k，都有 $\mathrm{P}(N = k) \to \frac{e^{-1}}{k!}$：在極限之下，對上的數目服從平均值為 1 的*泊松分佈*（Poisson distribution）。平均值為甚麼是 1，不用任何計算也看得出來：N 是 $E_1, \ldots, E_n$ 的指示變量（indicator）之和，每個的期望值（expectation）都是 $\frac{1}{n}$，而即使這些事件並非獨立，期望值仍然可以相加。STEP III 2004 Q12（見練習）證明方差（variance）同樣是 1。每當有許多機會很微、又近乎獨立的事件時，泊松分佈就會出現；錯排是一個經典例子，也是第 12 章 Section 12.11 的主題。

Montmort 的 *treize* 遊戲

Pierre Rémond de Montmort 是一位法國貴族，他在著作 *Essay d'analyse sur les jeux de hazard*（1708）中研究各種博彩遊戲。在 *treize*（十三）這個遊戲中，玩家派出十三張牌，同時口中數着「一、二、三……」，只要有一次派出的牌與所數的數字相同，便算勝出。Montmort 求出了勝出的概率，並在與尼古拉·伯努利（Nicolaus Bernoulli）的通信中，於 1713 年或之前確立了一般公式。歐拉（Euler）在 1753 年重新發現了這條公式。容斥原理其後由棣莫弗（Abraham de Moivre）加以形式化，而它的一般形式則由西爾維斯特（James Joseph Sylvester）在十九世紀建立。

延伸練習

1 **球衣。**試做 STEP III 2004，第 12 題（step.maths.org/questions/04-s3-q12）。這道題用指示變量點算穿上自己球衣的球員人數，求出平均值和方差，並把結果與泊松分佈

比較。

2 **遞推關係。**設 D_n 為 n 件物件的錯排數目。考慮卡 1 去了哪個位置，以及原本在該位置的卡是否去了位置 1，證明 $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$。用 $D_3 = 2$、$D_4 = 9$ 驗算。

3 **恰好 k 張。**證明恰好有 k 張卡在自己位置上的概率是 $\frac{1}{k!}d_{n-k}$，並且它趨向 $\frac{e^{-1}}{k!}$。

4 **互質的整數。**用容斥原理點算由 1 至 30 的整數中，不能被 2、3 和 5 任何一個整除的有多少個。你的答案與 $30\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)$ 有甚麼關係？

延伸閱讀

- **Geoffrey Grimmett & Dominic Welsh, *Probability: An Introduction***（Oxford University Press）。大學一年級教科書，涵蓋容斥原理和配對問題。
- **William Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. 1**（Wiley），第 IV 章。經典之作，載有配對問題的許多變化。
- **Miklós Bóna, *A Walk Through Combinatorics***（World Scientific），關於容斥原理的部分。

完整的引導式解答見第 9.8 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch09/derangements.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com