9.7 相等的冪和

工作紙

題目

STEP I 1992，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/92-s1-q5

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

> **想一想**　若多項式 $\mathrm{p}(x) = \sum c_k x^k$ 滿足 $\mathrm{p}(1) = 0$，這對各係數（coefficient）有甚麼含意？若 $\mathrm{p}'(1) = 0$ 又如何？

階段 1　三重根（triple root）

涵蓋：因式 $(1 - x)^3$

> **想一想**　把 $1 - x^2$ 和 $1 - x^4$ 盡量因式分解（factorise）。合共得到多少個 $1 - x$ 的因式？

階段 2 在 1 處的導數（derivative）

涵蓋：$\mathrm{p}_0'(1) = 0$ 和 $\mathrm{p}_1'(1) = 0$

停一停，試一試 寫成 $\mathrm{p}_0(x) = (1-x)^3\mathrm{q}(x)$，再用積法則（product rule）求導。$1-x$ 的幾次冪能整除 p_0'？那麼 $\mathrm{p}_1 = x\mathrm{p}_0'$ 呢？p_1' 又如何？

階段 3 讀出係數（coefficient）

涵蓋：兩個恆等式（identity）

想一想 把 p_0 展開。用係數 c_k 表示 $\mathrm{p}_0'(1)$ 和 $\mathrm{p}_1'(1)$。哪些位置是 $+1$，哪些位置是 -1？

階段 4　再多一個因式

涵蓋：最後一部分

> **停一停，試一試**　要令立方和也相等，你需要第四個 $1 - x$ 的因式。把 p_0 乘以 $1 - x^8$。讀出由 0 至 15 各項係數的正負號，然後按正負號把這些數分成兩組。

背後的數學

Thue–Morse 數列

$(1-x)(1-x^2)(1-x^4)(1-x^8)\cdots$ 各係數的正負號構成 *Thue–Morse* 數列。以 0 代表 $+$、1 代表 $-$，寫出來就是：

$$0\,1\,1\,0\,1\,0\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,0\,1\,1\,0\ \ldots$$

它有三種等價的描述。

- **倍增：**由 0 開始，不斷把手上已有的部分的補（complement，即把 0 與 1 互換）接在後面：$0 \to 01 \to 0110 \to 01101001 \to \cdots$。
- **二進制數字：**把 k 寫成二進制（binary）時，若當中 1 的個數是偶數，第 k 項便是 0；若是奇數，便是 1。（這就是 x^k 的正負號為 $(-1)^{1\text{ 的個數，取自 }k}$ 的原因：要從乘積中得出 x^k，就要選取那些在二進制中組成 k 的因子 x^{2^m}，而每一個都帶來一個負號。）
- **多項式：**$\prod_m (1 - x^{2^m})$ 的各係數，一如題目所示。

按 Thue–Morse 數列把 $0, 1, \ldots, 2^N - 1$ 分開，所得的兩個集合對於每個 $r < N$ 都有相等的 r 次方之和（圖 9.7.1）。這就是 *Prouhet–Tarry–Escott 問題*（Prouhet–Tarry–Escott problem）：找出兩個不同的整數集合，使它們的 r 次方之和在 $r = 1, \ldots, k$ 時全部相等。Prouhet 的解用了 2^{k+1} 個數；究竟最少需要多少個數，是一個著名的未解決問題。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

$1+4+6+7+10+11+13+16=68$

$2+3+5+8+9+12+14+15=68$

平方：$748=748$　　立方：$9248=9248$　　四次方：$122\,692\neq 121\,156$

圖 9.7.1　按 Thue–Morse 數列分開的 1 至 16。兩個集合的和相等、平方和相等、立方和也相等，但四次方之和並不相等；要做到這一點，便需要 1 至 32。由左至右讀出顏色，得到的規律是藍綠–紫–紫–藍綠、紫–藍綠–藍綠–紫、…。

最公平的輪流方式

兩個小孩輪流從一堆糖果中挑選，最好的先被選走。若他們以 $ABABAB\ldots$ 的次序交替，那麼每一對糖果中較好的一顆總是歸 A，這是一種系統性的優勢。$ABBA$ 的次序較為公平，而 $ABBABAAB$ 更加公平：這正是 Thue–Morse 數列，而次方和平衡恰恰就是箇中原因。若糖果的價值由其位置的一個光滑函數給出，把該函數展開成多項式，便可看到 Thue–Morse 次序會把它的首幾項抵銷。同樣的想法曾被提議用於足球的互射十二碼（足球規則制定者自 2017 年起試行的「$ABBA$」次序），而網球決勝局的發球次序亦採用這個方式。

Thue、Morse 與 Euwe

這個數列曾多次被人發現。Prouhet 在 1851 年用過它。Axel Thue 在 1912 年研究沒有重複規律的數列時重新發現了它：它永遠不會連續三次出現同一段（即它是「無立方」(cube-free) 的）。Marston Morse 在 1921 年研究曲面上的測地線 (geodesics) 時再次發現它。而國際象棋世界冠軍尤偉（Max Euwe）在 1929 年用它證明了，當時生效的重複局面和棋規則並不能防止對局無限延續下去。時至今日，它是*自動數列*（automatic sequences）理論中的核心例子；自動數列是指由簡單機器讀取 n 的二進制數字而計算出來的數列。

延伸練習

1 **平移。**試做 STEP II 2025，第 8 題（載於 OCR 提供下載的 2025 年試卷，www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip）。該題說明怎樣把一個令和與平方和平衡的分法，透過平移其中一列再合併，變成一個更大而且連立方和也平衡的分法。

2 **平方的平方。**（同樣出自 STEP II, 2025。）集合 $A=\{1,3,4,5,9,11\}$ 和 $B=\{2,6,7,8,10\}$ 的和相等，平方和也相等。對於每個正整數 n，把 $\{n^2,(n+1)^2,\ldots,(n+11)^2\}$ 分成兩個和相等的集合。（提示：把 0 加入第二個集合。）

3 **平移不變性（translation invariance）。**證明：若兩個數集的 r 次方之和在 $r = 0, 1, \ldots, k$ 時全部相等，那麼把每個元素都加上同一個數 c 所得的兩個集合亦然。為甚麼這表示題目中的集合 $\{1, \ldots, 15\}$ 同樣可以換成任意 16 個連續整數？

4 **公平分糖果。**糖果的價值為 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{8}$。比較 A 在 $ABABABAB$ 和 $ABBABAAB$ 兩種次序下所得的總值。

延伸閱讀

- **Jean-Paul Allouche & Jeffrey Shallit, “The ubiquitous Prouhet–Thue–Morse sequence”**，載於 *Sequences and Their Applications*（Springer, 1999）。綜述這個數列在各處的出現；可在網上免費閱讀。
- **Matt Parker, *Things to Make and Do in the Fourth Dimension***（Penguin）。內容包括等次方和及其他數字趣聞。
- **Joshua Cooper & Aaron Dutle, “Greedy Galois games”**，*American Mathematical Monthly* 120 (2013)。公平輪流與 Thue–Morse 數列。

完整的引導式解答見第 9.7 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch09/equal-power-sums.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com