9.6 奇怪的骰子

工作紙

題目

STEP I 1993，第 1 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/93-s1-q1

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想　假設第一顆骰子有 p_i 個面顯示 i，第二顆有 q_j 個面顯示 j，那麼擲出點數和 t 共有多少種方法？

階段 1　兩端的情況

涵蓋：找出新的點數編排

想一想　把兩顆骰子稱為 A 和 B，其中分別有 a_i 和 b_i 個面顯示 i。點數總和不可能擲出 2。這對 $a_1 b_1$ 說明了甚麼？擲出 3 的方法有兩種：這些方法來自哪些乘積？

階段 2 由小至大推算

涵蓋：找出新的點數編排

停一停，試一試 假設 1 都在 A 上，所以 $b_1 = 0$。這時 (a_1, b_2) 有兩種情況。先寫出總和為 4 的方程，再寫出總和為 5 的方程，然後在每種情況下求解。

階段 3 情況 (a) 不成立

涵蓋：找出新的點數編排

想一想 在 $a_1 = 2$、$b_2 = 1$ 的情況下，寫出總和為 7 的方程。B 還剩下多少個面可以用來放 5 和 6？這可能嗎？

階段 4　情況 (b) 成立

涵蓋：找出新的點數編排

> **想一想**　在另一種情況下，利用總和 6 和 11，以及「總和不可能是 12」即 $a_6 b_6 = 0$ 這一事實。最後，檢查你的兩顆骰子能否給出整個表。

背後的數學

把骰子看成多項式

把每顆骰子寫成一個多項式：每個顯示 i 的面對應一項 x^i。普通骰子是 $x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$，而題目中的兩顆骰子是

$$A(x) = x + x^4 + x^5 + 3x^6, \qquad B(x) = 2x^2 + x^3 + x^4 + 2x^5.$$

相乘時，每一對面貢獻 $x^i x^j = x^{i+j}$，所以 $A(x)B(x)$ 中 x^t 的係數（coefficient），就是擲出點數和 t 的方法數目。這又是 Section 9.4 中母函數（generating function）的想法：點數和的列表其實就是乘積 $A(x)B(x)$，而我們逐個情況的推論，正是把它因式分解（factorise）的一種方法。

Sicherman 骰子

兩顆普通骰子的乘積是 $(x + x^2 + \cdots + x^6)^2$。任何一對點數和分佈相同的骰子，其多項式 $P(x)$、$Q(x)$ 必須滿足 $P(x)Q(x) = (x + \cdots + x^6)^2$。現在作因式分解：

$$x + x^2 + \cdots + x^6 = x(1+x)(1+x+x^2)(1-x+x^2),$$

而這些因式不能再進一步分解（成為整數係數的多項式）。所以 P 和 Q 都必須由因式 x、$1+x$、$1+x+x^2$、$1-x+x^2$ 組成，而每個因式合共出現兩次。以下三個條件把選擇收窄：

- 每顆骰子有 6 個面，所以 $P(1) = Q(1) = 6$；各因式在 $x = 1$ 時的值分別是 1、2、3、1，所以每顆骰子各得一個 $1 + x$ 和一個 $1 + x + x^2$；

- 沒有任何面顯示 0，所以 $P(0) = Q(0) = 0$：每顆骰子各得一個因式 x；
- 餘下唯一的自由，是兩個 $1 - x + x^2$ 如何分配。每顆各得一個，就是普通骰子。兩個都歸同一顆骰子，則得

$$x(1+x)(1+x+x^2) = x + 2x^2 + 2x^3 + x^4,$$
$$x(1+x)(1+x+x^2)(1-x+x^2)^2 = x + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^8.$$

這就是 Sicherman 骰子，1, 2, 2, 3, 3, 4 和 1, 3, 4, 5, 6, 8（圖 9.6.1），而以上論證亦證明了它們是唯一的另一種可能。關鍵在於：多項式與整數一樣，可以唯一地分解為不可約（irreducible）因式的乘積——數論與組合數學（combinatorics）在此相遇。

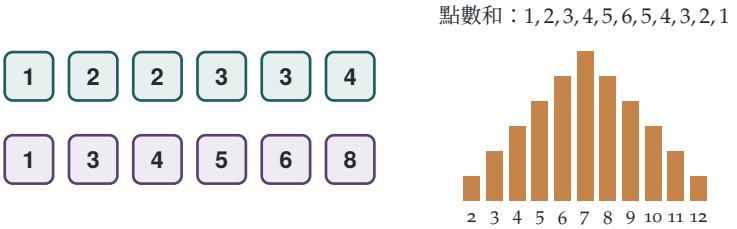


圖 9.6.1 Sicherman 骰子。兩顆一起擲，由 2 到 12 的每個點數和出現的頻數，都與兩顆普通骰子完全相同（右）：擲出 2 有一種方法，擲出 3 有兩種方法，如此類推，直至擲出 7 有六種方法。

概率母函數

在概率論中，同一個想法以*概率母函數*（probability generating function）的形式出現：取值 $0, 1, 2, \ldots$ 的隨機變量（random variable）X 有 $G(t) = E(t^X) = \sum P(X = k)t^k$，而對於獨立（independent）的 X 和 Y，$E(t^{X+Y}) = E(t^X)E(t^Y)$。獨立隨機變量之和，對應於母函數之積。STEP III 2003 Q14（見練習）就是用這個方法找出 Sicherman 骰子，而 Section 9.13 則用一個相關的論證，說明無論怎樣在兩顆骰子上做手腳，都不能令所有點數和出現的機會均等。

延伸練習

1 **四面體骰子。**試做 STEP III 2003，第 14 題（step.maths.org/questions/03-s3-q14），該題就四面骰子提出 Sicherman 的問題。（提示：$x + x^2 + x^3 + x^4 = x(1+x)(1+x^2)$。）

2 **驗證列表。**展開 $(x + x^4 + x^5 + 3x^6)(2x^2 + x^3 + x^4 + 2x^5)$，並與題目中的列表對照。

3 **三顆骰子。**是否存在三顆六面骰子，各面標上正整數，不全是標準骰子，而其點數和的分佈與三顆標準骰子相同？（提示：$(x + \cdots + x^6)^3$ 的因式現在包括三個 $1 - x +$

$x^2 \circ$)

4 **一枚硬幣與一個八面體。**一顆標上 $1, \ldots, 8$ 的八面骰子，和一顆標上 $1, 2$ 的兩面「骰子」（即一枚硬幣）：能否用另一種方式重新標號，而點數和的分佈保持不變？

延伸閱讀

- **Martin Gardner, *Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers***（Mathematical Association of America）。收錄了關於 Sicherman 骰子的那篇專欄文章。
- **Joseph Gallian & David Rusin, "Cyclotomic polynomials and nonstandard dice"**, *Discrete Mathematics* 27 (1979)。一般理論，適用於任意面數的骰子。
- **Herbert Wilf, *generatingfunctionology***（可於網上免費閱覽），第 1 章。

完整的引導式解答見第 9.6 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch09/strange-dice.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com