9.5 湊零錢

工作紙

題目

STEP I 1997，第 1 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/97-s1-q1

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

> **想一想**　只用 2p 和 1p 硬幣，湊出 n 便士有多少種方法？為甚麼答案只取決於你用了多少枚 2p 硬幣？

階段 1　十便士

涵蓋：making 10 pence

> **想一想**　按面值最大的硬幣來分類。你要麼用一枚 10p 硬幣，要麼不用。如果不用，可以用多少枚 5p 硬幣？然後數一數用 2p 和 1p 硬幣湊出餘下金額的方法有多少種。

階段 2　逐層累積

涵蓋：making 20 pence

停一停，試一試　設 $b(n)$ 為用 5p、2p 和 1p 硬幣湊出 n 便士的方法數目。先選定 5p 硬幣的枚數，再把 $b(n)$ 寫成若干個「只用 2p 和 1p 硬幣」的方法數目之和。為 $n = 0, 5, 10, 15, 20$ 列一個表。

想一想　現在用同樣的方法加入 10p 硬幣，並利用你求得的 b 值。

階段 3　二十便士

涵蓋：making 20 pence

> **想一想**　最後一步：你要麼用那枚 20p 硬幣，要麼不用。把各種情況加起來。

背後的數學

把硬幣看成等比級數

以下這個想法把問題化為代數。所用 5p 硬幣的數目可以是 $0, 1, 2, \ldots$，分別貢獻 $0, 5, 10, \ldots$ 便士。把這一點記錄成級數

$$1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \cdots = \frac{1}{1 - x^5}.$$

對每種硬幣都這樣做，然後相乘：

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)(1-x^{10})(1-x^{20})} = \sum_{n} w(n) x^n.$$

把各括號乘開時，每一項 x^n 都來自在每個括號中各選一項，也就是為每種硬幣各選一個數目，而總值為 n。所以 x^n 的係數 $w(n)$ 正好就是湊出 n 便士的方法數。第 2 階段的表格，其實就是把這個乘積逐個括號乘開。這正是 Section 9.4 中母函數（generating function）的想法，而乘法正是它大顯威力之處：母函數之積所計算的，就是各項選擇的組合數目。

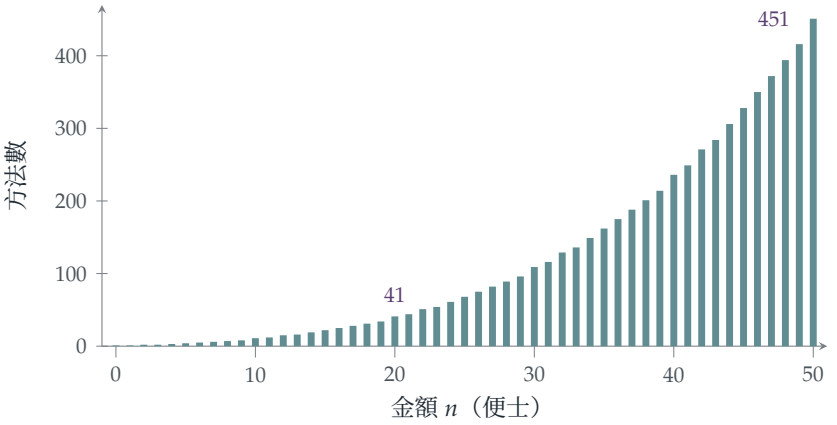

圖 9.5.1　用 1p、2p、5p、10p、20p 和 50p 硬幣湊出 n 便士的方法數。在 5 和 10 的倍數處出現的跳升，顯示新硬幣首次可用的位置。有六種硬幣時，方法數的增長大致與 n^5 相若：一般而言，增長有如一個多項式，其次數比硬幣種數少一。

分拆

假如每個正整數都可以作為硬幣的面值，又會怎樣？這時，不計次序而把 n 寫成正整數之和的方法數，就是**分拆數**（partition number）$p(n)$。例如 $p(4) = 5$，因為 $4 = 3+1 = 2+2 = 2+1+1 = 1+1+1+1$。歐拉在 1748 年看出

$$\sum_{n\geq 0} p(n)x^n = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\cdots},$$

並用它發現了一些非凡的恆等式（identity）。其中之一是：把 n 寫成*互不相同*的部分之和的方法數，等於把它寫成*奇數*部分之和的方法數。（用母函數來證明，只需一行代數：請在練習中一試。）

哈代、拉馬努金與 $p(200)$

分拆數增長得很快：$p(10) = 42$，$p(100) = 190\,569\,292$。1918 年，哈代（G. H. Hardy）與拉馬努金（Srinivasa Ramanujan）為 $p(n)$ 找到一條令人驚歎的公式，那是一個無窮級數（infinite series），其首項為

$$p(n) \approx \frac{1}{4n\sqrt{3}}\, e^{\pi\sqrt{2n/3}}.$$

為了檢驗這條公式，Percy MacMahon 利用歐拉的恆等式，徒手算出 $p(200) = 3\,972\,999\,029\,388$。哈代與拉馬努金的級數只取首幾項，所得結果與正確答案相差不足一。拉馬努金還發現 $p(5n+4)$ 必定可被 5 整除，$p(7n+5)$ 必定可被 7 整除，而 $p(11n+6)$ 必定可被 11 整除。至於為何再沒有其他這類規律，則要到二十一世紀才得

到解釋。

延伸練習

1. **兩種六。**試做 STEP II 2012，第 1 題（step.maths.org/questions/12-s2-q1）。該題利用等比級數之積來計數。做完之後，請描述一個以這些係數為答案的硬幣計數問題。

2. **互異與奇數。**證明 $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots$ 是分拆成互不相同部分的母函數。利用 $1+x^k = \frac{1-x^{2k}}{1-x^k}$ 證明它等於 $\frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\cdots}$，並由此推出歐拉定理。就 $n=6$ 驗證這個結果。

3. **一條公式。**證明只用 1p、2p 和 5p 硬幣湊出 n 便士的方法數，是最接近 $\frac{(n+4)^2}{20}$ 的整數。（先用較小的 n 驗證。）

4. **次序有別。**把 1p 和 2p 硬幣逐枚投入投幣口來湊出 n 便士，若次序有別，共有多少種方法？（這個數列（sequence）你以前見過。）

延伸閱讀

- **George Andrews & Kimmo Eriksson, *Integer Partitions***（Cambridge University Press）。一本為大學本科生而寫的入門書，篇幅短小，淺白易讀。
- **波利亞（George Pólya），「On picture-writing」**，*American Mathematical Monthly* 63 (1956)。波利亞以兌換一美元的問題（共有 292 種方法）來講解母函數的經典文章。
- **Robert Kanigel, *The Man Who Knew Infinity***（Abacus）。拉馬努金的生平，以及他與哈代的合作。

完整的引導式解答見第 9.5 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch09/making-change.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com