9.4 把數列看成函數

工作紙

題目

STEP I 2016，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/16-s1-q8

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想　哪個數列的生成函數是 $\dfrac{1}{1-x}$？$\dfrac{1}{1-2x}$ 又如何？如果把一個數列的生成函數乘以 x，數列會有甚麼變化？

階段 1 自然數與三角形數

涵蓋：第 (i) 部分

想一想 用二項式級數（binomial series）展開 $(1-x)^{-2}$ 和 $(1-x)^{-3}$。兩者之中 x^n 的係數（coefficient）分別是甚麼？乘以 x 又會有甚麼效果？

停一停，試一試 用 n 和 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 表示 n^2。生成函數（generating function）可以相加，正如數列（sequence）可以相加一樣。

階段 2　遞推關係化為方程

涵蓋：第 (ii)(a) 部分

停一停，試一試　把 $u_n = ku_{n-1}$ 乘以 x^n，再對所有 $n \geq 1$ 求和。把等式兩邊各以 $\mathrm{f}(x)$ 表示，並記住左邊的和式欠缺 $n = 0$ 的一項。

階段 3　斐波那契數

涵蓋：第 (ii)(b) 部分

想一想　對 $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ 作同樣的處理，對 $n \geq 2$ 求和。每個和式各欠缺了開首的哪幾項？然後代入 $u_0 = 0$ 和 $u_1 = 1$。

階段 4 **解釋** 1/89

涵蓋：題目以外

? **想一想** 在第 (ii)(b) 部分的答案中代入 $x = \frac{1}{10}$。你留意到甚麼？

背後的數學

從生成函數到公式

生成函數不只是把數列編碼：它還可以把數列解出來。分母可以因式分解為 $1 - x - x^2 = (1 - \varphi x)(1 - \psi x)$，其中 $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 和 $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 是 $t^2 = t + 1$ 的根。由部分分式（partial fractions）可得

$$\frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1 - \varphi x} - \frac{1}{1 - \psi x}\right),$$

再把每個分式展開成等比級數，

$$F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}.$$

這就是*比內公式*（*Binet's formula*）。由於 $|\psi| < 1$，第二項非常小，所以 F_n 是最接近 $\varphi^n/\sqrt{5}$ 的整數，而相鄰兩個斐波那契數之比趨向黃金比（golden ratio）（這是 Section 2.2 的主題）。同一方法可以解任何常係數線性遞推關係（linear recurrence with constant coefficients）；練習中有一個來自 STEP I 2004 的例子。

生成函數為何如此有用

真正的威力在相乘時才顯現出來。乘積 $f(x)g(x)$ 中 x^n 的係數是 $\sum_k u_k v_{n-k}$，即對所有把 n 拆成兩部分的方法求和。要數算由兩個部分組成的東西，這正是我們所需要的。接下來的兩節會用它來數算找換零錢的方法（Section 9.5），以及找出點數古怪、但總和的分佈與普通骰子相同的骰子（Section 9.6）。在概率中，同一想法給出*概率生成函數*（*probability generating function*），它把獨立隨機變量之和變成乘積。

棣莫弗、歐拉與拉普拉斯

棣莫弗（Abraham de Moivre）在 1720 年代用生成函數來解線性遞推關係，所用的方法基本上就是上面的方法。歐拉（Leonhard Euler）在 1748 年用它們來研究整數的分拆（partitions），而拉普拉斯（Pierre-Simon Laplace）則以它們作為其著作 *Théorie analytique des probabilités*（1812）的基礎。到了二十世紀，生成函數成為組合數學的核心，而解析方法（把生成函數看成複變數的函數來研究）如今能為複雜得無法精確求解的計數問題給出精確的估計。

延伸練習

1 **每次兩位數字。**試做 STEP II 2022，第 3 題（載於 OCR 提供下載的 2022 年試卷，www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip）。它解釋了為何 $\frac{1}{89}$ 的小數展開式以斐波那契數開首，並要求找出一個分數，其小數每次兩位數字地顯示這個規律。

2 **解遞推關係。**試做 STEP I 2004，第 7 題（step.maths.org/questions/04-s1-q7）。它用生成函數和部分分式解一個線性遞推關係，然後把這個方法倒過來做。

3 **逐一數數。**證明 $\frac{1}{9801} = 0.00\,01\,02\,03\,04\ldots$，其中每兩位數字為一組，逐一向上數。這個規律最先在哪裏出錯？為甚麼？

4 **平方和。**解釋為何 $\frac{1}{1-x}\mathrm{f}(x)$ 是部分和 $u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ 的生成函數。利用這一點和第 (i) 部分的答案，求 $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ 的公式。

延伸閱讀

- **Herbert Wilf, *generatingfunctionology***（A K Peters；網上免費閱讀）。經典的入門書。讀完本節後，最適合接着讀第 1 章。
- **Ronald Graham, Donald Knuth & Oren Patashnik, *Concrete Mathematics***（Addison-Wesley），第 7 章。
- **Philippe Flajolet & Robert Sedgewick, *Analytic Combinatorics***（Cambridge University Press；網上免費閱讀）。遠遠超出大學一年級的程度，但開首數頁展示了這門學問的去向。

完整的引導式解答見第 9.4 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch09/generating-functions.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com