9.3 為籬笆樁着色

工作紙

題目

STEP II 1995，第 2 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/95-s2-q2

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

停一停，試一試 數一數為圍成一圈的 3 根柱子髹色有多少種方法，4 根又有多少種。$3 \times 2^{n-1}$ 有沒有多算？多算了多少？

階段 1　兩類塗色方式

涵蓋：為何 $r_{n+1} = s_n$，以及求 $r_n + s_n$

停一停，試一試　考慮 $n+1$ 根柱的一種塗色（colouring）方式，其中第一根和最後一根柱都是紅色。第 n 根柱可以是甚麼顏色？把最後一根柱移走：餘下的是 n 根柱的哪一類塗色方式？你能否反過來，由後者還原出前者？

想一想　$r_n + s_n$ 所數算的，是 n 根柱中第一根為紅色的所有塗色方式。第一根之後的每根柱各有多少種選擇？

階段 2　以歸納法證明公式

涵蓋：歸納法

想一想　先驗證 $n = 1$ 的情況。然後把 r_n 的公式代入 $r_{n+1} = 2^{n-1} - r_n$，再化簡。這就是數學歸納法（induction）的歸納步驟。

階段 3 **圓形**

涵蓋：圍成一圈的柱

> **停一停，試一試** 固定第 1 根柱為紅色，並在第 n 根柱與第 1 根柱之間把圓圈剪開，使各柱排成一直線。這條直線上的塗色方式必須滿足哪個額外條件？r_n 和 s_n 之中，哪一個數算的正是這些塗色方式？第 1 根柱可以有多少種顏色？

背後的數學

色多項式

柱子和它們之間的相鄰關係構成一個圖（graph）：排成一列時是一條路徑（path），圍成一圈時是一個圈（cycle）。*正常着色*（proper colouring）給相鄰的頂點（vertex）不同的顏色。用 k 種顏色的正常着色數目是 k 的一個多項式，稱為該圖的*色多項式*，由伯克霍夫（George Birkhoff）於 1912 年引入。用 k 種顏色重複題目中的論證，可得

$$\text{路徑：} k(k-1)^{n-1}, \qquad \text{圈：} (k-1)^n + (-1)^n(k-1).$$

取 $k = 3$，圈的公式就是 $2^n + 2(-1)^n$。伯克霍夫希望透過證明每幅地圖所對應的圖的色多項式在 $k = 4$ 時為正數，從而證明四色定理（每幅地圖都可以用四種顏色着色，使相鄰的國家顏色不同）。這個方法始終未能成功；定理最終在 1976 年由阿佩爾（Kenneth Appel）和哈肯（Wolfgang Haken）借助大量電腦運算證明。色多項式至今仍是一個活躍的研究領域，並與統計物理（statistical physics）有出人意表的聯繫：在那裏它們以描述磁性的*波茨模型*（Potts model）的形式出現。

用矩陣數出同一個答案

還有另一種方法可以看出答案，用的是第 7 章的線性代數（linear algebra）。設 $\mathbf{M}$ 為對角線上是 0、其餘位置是 1 的 3×3 矩陣：當顏色 j 可以跟在顏色 i 之後時，第 (i, j) 項為 1。那麼 $\mathbf{M}^{n-1}$ 的第 (i, j) 項數的是由顏色 i 開始、以顏色 j 結束的直列着色，所以 r_n

是 $\mathbf{M}^{n-1}$ 的一個對角線項。圓圈着色是經過 n 步後回到起點的一個序列，所以圓圈着色的數目就是 $\mathbf{M}^n$ 的跡（trace）。由於 $\mathbf{M} = \mathbf{J} - \mathbf{I}$，其中 $\mathbf{J}$ 的每一項都是 1，$\mathbf{M}$ 的特徵值（eigenvalue）是 $3-1=2$（特徵向量（eigenvector）為 $(1,1,1)$）和 -1（兩重），而 $\mathbf{M}^n$ 的跡是各特徵值的 n 次方之和：

$$\operatorname{tr}\mathbf{M}^n = 2^n + (-1)^n + (-1)^n = 2^n + 2(-1)^n.$$

這種*轉移矩陣*（transfer matrix）方法在組合數學（combinatorics）和統計物理中隨處可見，用來數算逐步構造出來的排列。

延伸練習

1 **k 種顏色。**用 k 種顏色重做這道題。證明 $r_{n+1} = s_n$ 仍然成立，並且 $r_{n+1} + r_n = (k-1)^{n-1}$，求 r_n，並由此推導出圈的色多項式 $(k-1)^n + (-1)^n(k-1)$。

2 **沒有兩根紅柱相鄰。**把排成一列的 n 根柱子髹成紅色或白色，而且沒有兩根相鄰的柱子同為紅色，共有多少種方法？（你應該會得到斐波那契數（Fibonacci numbers）。）

3 **輪子。**加一根位於中心的柱子，與圓圈上的每根柱子都相鄰（一個「輪子」）。用 4 種顏色為它着色有多少種方法？（*提示*：中心用去一種顏色，圓圈必須使用其餘三種。）

4 **項鏈。**如果圓圈的兩種着色在其中一種可由另一種旋轉而得時視為相同，那麼當 $n = 4$ 時有多少種不同的着色？$n = 5$ 時呢？（這是*伯恩賽德引理*（Burnside's lemma）的開端。）

延伸閱讀

- **Robin Wilson, *Introduction to Graph Theory***（Pearson）。標準的圖論入門教材；涵蓋着色和四色問題。
- **Robin Wilson, *Four Colours Suffice***（Penguin）。四色定理的故事，為一般讀者而寫。
- **Herbert Wilf, *generatingfunctionology***（可在網上免費閱讀）。講述遞歸關係及其解法，包括轉移矩陣方法。

完整的引導式解答見第 9.3 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch09/fence-posts.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com