9.2 小型版的拉姆齊定理

工作紙

題目

STEP I 1989，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/89-s1-q4

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

> **想一想**　那六個點之所以重要，只在於哪些點對以哪種顏色相連：幾何只會令人分心。一共有多少條線段？每個點又連出多少條？

階段 1　五條線段，兩種顏色

涵蓋：six points

> **想一想**　從點 A 出發有五條線段，每條不是金色就是銀色。有沒有可能每種顏色最多只有兩條？其中至少三條必定有甚麼共通之處？

階段 2 看看另一端

涵蓋：six points

停一停，試一試 假設 AB、AC、AD 全是金色。現在看看三角形 BCD。如果它有任何一條邊是金色，會怎樣？如果一條也沒有呢？

階段 3　五個點並不足夠

涵蓋：five points

想一想　若只有五個點，每個點只連着四條線段，所以你可以嘗試令每個點都是兩種顏色各佔兩條。把這些點排成正五邊形（regular pentagon）：各邊塗一種顏色，對角線（diagonal）塗另一種顏色。當中有沒有單色三角形？

背後的數學

拉姆齊數

拉姆齊數（*Ramsey number*）$R(s,t)$ 是滿足以下條件的最小的 N：把 K_N 的邊以金、銀兩色着色，無論怎樣着色，都必定包含一個金色的 K_s（即 s 個點，它們之間的所有邊都是金色）或一個銀色的 K_t。這道題已證明了 $R(3,3)=6$：六個點必定可行，而五邊形說明五個點並不可行。

弗蘭克·拉姆齊（Frank Ramsey）在 1928 年證明了這些數必定存在：對任意的 s 和 t，總有某個 N 符合要求。證明用的是歸納法（induction），把上面的論證加以推廣，並得出 $R(s,t)\le R(s-1,t)+R(s,t-1)$。但要找出確切的數值卻異常困難：

$$R(3,3)=6,\qquad R(4,4)=18,\qquad 43\le R(5,5)\le 46.$$

$R(4,4)$ 的值是在 1955 年求得的。儘管已動用電腦作大規模搜尋，$R(5,5)$ 至今仍然未知；上界 46 到 2024 年才獲證明。電腦無法直接檢查 K_{43} 的每一種着色：一共有 2^{903} 種，遠遠多於宇宙中原子的數目。

艾狄胥與外星人

保羅·艾狄胥（Paul Erdős）對拉姆齊理論（Ramsey theory）發展的貢獻無人能及，他很喜歡講這個故事。假設外星人入侵地球，並威脅說除非我們告訴他們 $R(5,5)$ 的值，否則就毀滅地球。我們應當調動所有電腦和數學家，這樣或許能把它找出來。但假如他

們問的是 $R(6,6)$，我們就應該設法消滅外星人。艾狄胥還在 1947 年證明了 $R(k,k) > 2^{k/2}$，所用的方法令人驚歎：他證明了，在少於 $2^{k/2}$ 個點上隨機着色的圖，有正的概率不包含任何單色的 K_k，所以好的着色必定存在，儘管沒有人知道怎樣把它構造出來。這種*概率方法*（*probabilistic method*）如今是組合數學中最強大的工具之一。

亂中有序

拉姆齊定理有很多近親，它們表達的都是同一個想法：足夠大的結構無法避開秩序。*范德瓦爾登定理*（*Van der Waerden's theorem*）說，如果把所有整數以有限種顏色着色，就存在任意長的單色等差數列（arithmetic progression）。*艾狄胥—塞凱賴什定理*（*Erdős–Szekeres theorem*）說，任何由 n^2+1 個相異的數組成的數列，都包含一個長度為 $n+1$ 的遞增或遞減子數列（subsequence）。而拉姆齊本人感興趣的是一個邏輯問題：他是在一篇關於判定邏輯命題真假的論文中，把這條定理作為引理（lemma）來證明的。

延伸練習

1. **至少兩個。**證明在 K_6 的任何雙色着色中，其實至少有兩個單色三角形。（提示：數一數「雙色角」的數目，即在同一個頂點上的一對不同顏色的邊。若一個點有 g 條金色的邊和 $5-g$ 條銀色的邊，它就是 $g(5-g) \le 6$ 個這樣的角的頂點。每個非單色的三角形恰好包含兩個這樣的角。）

2. **三種顏色。**如果把 K_{17} 的邊以三種顏色着色，證明其中有一個單色三角形。（提示：有一個點至少有六條同色的邊。）

3. **三或四。**證明 $R(3,4) \le 10$：在 K_{10} 的任何金、銀着色中，都有一個金色三角形或一個銀色的 K_4。（提示：一個點要麼至少有 4 條金色的邊，要麼至少有 6 條銀色的邊。）事實上 $R(3,4) = 9$。

4. **單調子數列。**就 $n=2$ 的情形證明艾狄胥–塞凱賴什定理：任何由 5 個相異的數組成的數列，都包含一個長度為 3 的遞增或遞減子數列。找出一個由 4 個數組成、兩者皆無的數列。

延伸閱讀

- **Miklós Bóna, *A Walk Through Combinatorics***（World Scientific），組合數學入門書，可讀其中關於鴿巢原理和拉姆齊理論的章節。
- **Ronald Graham & Joel Spencer,「Ramsey theory」**，*Scientific American*（1990 年 7 月）。

由兩位頂尖研究者撰寫的科普介紹。

- **Noga Alon & Joel Spencer, *The Probabilistic Method***（Wiley）。講述艾狄胥這套方法的標準著作；第一章不難讀懂。
- **Paul Hoffman, *The Man Who Loved Only Numbers***（Fourth Estate）。艾狄胥的傳記。

完整的引導式解答見第 9.2 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch09/ramsey.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com