9.13 做了手腳的骰子

工作紙

題目

STEP I 1999，第 12 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/99-s1-q12

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想 對於 $x > 0$，你會怎樣證明 $x + \frac{1}{x} \geq 2$？等號何時成立？

階段 1 兩端的點數和

涵蓋：第 (i) 部分

想一想 用 q_i 和 r_j 表示點數和為 2 及 12 的概率（probability）。假設全部十一個點數和的概率都是 $\frac{1}{11}$：你會得到哪些方程？

階段 2 居中的點數和

涵蓋：第 (i) 部分

> **停一停，試一試** 在湊成 7 的各種方法之中，有兩種只用到 1 和 6 這兩個面。寫出它們的概率，再利用你的方程代換 q_1 和 q_6。哪裏可以用上 $x + \frac{1}{x} \geq 2$？

階段 3 同一顆骰子擲兩次

涵蓋：第 (ii) 部分

> **想一想** 兩次擲出相同點數的概率是 $q_1^2 + \cdots + q_6^2$。已知各 q_j 之和為 1，這個概率最小可以是多少？試試寫成 $q_j = \frac{1}{6} + e_j$。

背後的數學

用多項式來證明

以下是一個完全不同的證明，用的是 Section 9.6 的生成函數（generating function）。設 $Q(x) = q_1 x + \cdots + q_6 x^6$ 及 $R(x) = r_1 x + \cdots + r_6 x^6$。假如所有總和的概率都是 $\frac{1}{11}$，則

$$Q(x)R(x) = \frac{x^2 + x^3 + \cdots + x^{12}}{11} = \frac{x^2}{11}(1 + x + \cdots + x^{10}).$$

現在 $Q(x)/x$ 是一個 5 次實係數多項式（polynomial），而每個奇數次的實多項式都有一個實根（它的圖像由 $-\infty$ 走到 $+\infty$，或者反過來）。所以左邊有一個非零的實根。但 $1 + x + \cdots + x^{10} = \frac{x^{11}-1}{x-1}$，它的根是 1 以外的 11 次單位根（roots of unity），當中沒有一個是實數。矛盾。同樣的論證表明，只要 $n - 1$ 是奇數，即 n 是偶數，無論怎樣在兩顆 n 面骰子上做手腳，都不能令各個總和等可能。（當 n 是奇數時，多項式的論證需要多花些工夫，但上面的算術平均—幾何平均證明對每個 $n \geq 2$ 都適用。）

碰撞概率

第 (ii) 部分中的量 $\sum q_j^2$，即兩次獨立抽取結果相同的機會，稱為一個分佈的*碰撞概率*（collision probability）。第 (ii) 部分表明，均勻分佈（uniform distribution）的碰撞概率最小。它量度一個分佈有多集中：在生態學中，$\sum q_j^2$ 是辛普森多樣性指數（Simpson's index of diversity），其中 q_j 是物種 j 在某個生境中所佔的比例；在經濟學中，它是量度市場集中度的赫芬達爾指數（Herfindahl index）；在密碼學中，它量度一個密碼分佈有多容易被猜中。它也解釋了 Section 9.9 結尾的那句話：各個生日的概率不相等，只會令生日相同的情況更有可能出現。

不可能性的證明

數學中一些最著名的結果，說的正是某件事辦不到：沒有分數的平方等於 2；沒有尺規作圖法能三等分任意角；沒有根式公式能解所有五次方程；沒有算法能判定每一個數學命題。每一個這樣的結果都改變了所屬的學科，因為要證明*沒有*任何方法行得通，就必須了解所有方法構成的整個空間。灌鉛骰子問題是一個縮影：要排除每一種做手腳的方式，我們需要一個每種方式都必須遵守的不變性質（算術平均—幾何平均不等式）。

延伸練習

1. **柯西—施瓦茲不等式。**利用柯西—施瓦茲不等式 $\left(\sum a_j b_j\right)^2 \leq \sum a_j^2 \sum b_j^2$，取 $a_j = q_j$ 及 $b_j = 1$，為第 (ii) 部分給出一行的證明。

2. **兩顆不同的骰子。**如果把兩顆*不同*的灌鉛骰子各擲一次，它們點數相同的概率能否小於 $\frac{1}{6}$？能否等於 0？

3. **面上數字不同時的均勻總和。**證明如果兩顆骰子各面的數字另作安排，它們*可以*給出等可能的總和：試取一顆骰子的數字為 $0, 1, 2, 3, 4, 5$，另一顆為 $0, 6, 12, 18, 24, 30$。會出現哪些總和？為甚麼這與題目並不矛盾？

4 **三顆骰子。**三顆各面為 1 至 6 的六面灌鉛骰子，能否令 3 至 18 的所有總和等可能？（提示：利用總和 3、8、13 和 18，以及六個數的算術平均—幾何平均不等式。為甚麼多項式證明這次行不通？）

延伸閱讀

- **J. Michael Steele, *The Cauchy–Schwarz Master Class***（Cambridge University Press）。一本出色的不等式入門書，由算術平均—幾何平均不等式講起。
- **Geoffrey Grimmett & Dominic Welsh, *Probability: An Introduction***（Oxford University Press）。講述生成函數，以及它們在上述這類證明中的應用。
- **Ian Stewart, *Galois Theory***（CRC Press），開首數章。最著名的不可能性證明：五次方程。

完整的引導式解答見第 9.13 節：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch09/loaded-dice.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com