9.12 隨機子集

工作紙

題目

STEP III 2019，第 12 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2019 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想　怎樣用 n 條是非題的一串答案，來描述 $\{1, \ldots, n\}$ 的一個子集？

階段 1　一個元素

涵蓋：第 (i) 部分

想一想　把每個不含 1 的子集（subset）與加入 1 後所得的子集配對。含有 1 的子集佔全部子集的幾分之幾？

階段 2 互斥集合

涵蓋：第 (ii) 部分

停一停，試一試 A_1 與 A_2 互斥（disjoint），當且僅當沒有任何元素同時屬於兩者。就單一個元素而言，列出四種等可能（equally likely）的情況。哪一種是不容許的？為甚麼可以把 n 個元素的結果相乘？

想一想 若有 m 個集合，某個指定元素同時屬於所有集合的概率是多少？

階段 3　子集

涵蓋：第 (iii) 部分

想一想　若要 $A_1 \subseteq A_2$，一個元素的四種情況之中，哪一種是不容許的？

停一停，試一試　對於一條鏈（chain）$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3$，列出一個元素「屬於或不屬於」各集合的 8 種模式。一旦某元素屬於鏈中的一個集合，它還必定屬於哪些集合？數出容許的模式有多少種，然後對 m 個集合作同樣的處理。

背後的數學

不用概率的計數

把每個概率乘以選擇的總數，就得到一個計數。滿足 $A_1 \subseteq A_2$ 的有序對 (A_1, A_2) 的數目是 $4^n \times (\frac{3}{4})^n = 3^n$。你也可以直接數算這些有序對：先選定 A_2 的大小 k，然後以 $\binom{n}{k}$ 種方法選出 A_2 本身，再從它的 2^k 個子集中任選一個作為 A_1。所以

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = 3^n,$$

這正是 $(1+2)^n$ 的二項式定理（binomial theorem）。用兩種方法數算同一樣東西，一次按元素、一次按大小，便證明了一條恆等式：這就是算兩次（double counting）的方

法，你在 Section 7.9 討論柏拉圖立體時已經見過。同樣地，鏈 $A_1 \subseteq \cdots \subseteq A_m$ 的數目是 $(m+1)^n$。

子集的格

$\{1,\dots,n\}$ 的所有子集按包含關係排序，形成一個稱為布爾格（Boolean lattice）的結構，可以把它想像成一個 n 維立方體：每個子集是一個頂點，以它那一串是非題的答案作標記，而沿着一條棱移動，就是加入或移走一個元素。鏈就是向上走的路徑。有些深刻的結果描述了在給定條件下，子集族可以有多大。施佩納定理（Sperner's theorem，1928 年）指出，在沒有一個集合包含另一個集合的子集族之中，最大的一族有 $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ 個集合；艾狄胥—柯—拉多定理（Erdős–Ko–Rado theorem，1961 年）則說明，最多可以選出多少個 k 元集合，使得任意兩個都有共同元素。兩者都是組合數學（combinatorics）入門課程的標準內容，而把子集看成擲硬幣的觀點，給出了其中一些最漂亮的證明。

布爾的代數

布爾（George Boole）的 *The Laws of Thought*（《思維規律》，1854 年）把邏輯命題當作集合，把「與」、「或」、「非」當作交集、併集和補集。把一個集合編碼成一串是非題的答案，正是電腦表示集合的方法：$\{1,\dots,64\}$ 的一個子集就是單獨一個 64 位元的數，而交集就是「逐位元 AND」（bitwise AND）指令。本題的方法，即每次只看一個元素（一個位元），正是分析這類運算的方法。

延伸練習

1 **覆蓋。**求 $\mathrm{P}(A_1 \cup A_2 = S)$ 和 $\mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m = S)$。

2 **大小相同。**證明 $\mathrm{P}(|A_1| = |A_2|) = \binom{2n}{n}/4^n$。（提示：$|A_1| = |A_2|$ 當且僅當 $|A_1| + |S \setminus A_2| = n$。）證明當 n 很大時，這個概率約為 $1/\sqrt{\pi n}$。

3 **分成三份。**證明 S 的不相交子集所組成的有序對 (A, B) 的數目是 3^n，並求由不相交子集所組成的無序對 $\{A, B\}$ 的數目。

4 **小 n 的施佩納定理。**對 $n = 3$ 和 $n = 4$，求 $\{1,\dots,n\}$ 的子集族中，沒有一個集合包含另一個集合的最大一族。

延伸閱讀

- **Miklós Bóna, *A Walk Through Combinatorics***（World Scientific），其中關於子集和偏序集（partially ordered sets）的章節。

- **Béla Bollobás,** ***Combinatorics: Set Systems, Hypergraphs, Families of Vectors and Combinatorial Probability***（Cambridge University Press）。一本簡短而優雅的書，講述子集族，由施佩納定理說起。
- **Peter Cameron,** ***Combinatorics: Topics, Techniques, Algorithms***（Cambridge University Press）。一門入門課程，特別着重用兩種方法計數。

完整的引導式解答見第 9.12 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch09/random-subsets.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com