9.10 總能找贖

工作紙

題目

STEP I 2011，第 12 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/11-s1-q12

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

> **想一想**　每位拿 £1 的顧客會給你一枚硬幣；每位拿 £2 的顧客會取走一枚（作為找贖）。你甚麼時候會無法繼續？

階段 1　一枚 £2 硬幣

涵蓋：第 (i) 部分

> **想一想**　只有一位顧客持 £2 硬幣時，你在甚麼情況下會無法找贖？這位顧客排在隊伍（queue）最前的概率是多少？

階段 2 兩枚 £2 硬幣

涵蓋：第 (ii) 部分

> **停一停，試一試** 第一個人必須持 £1 硬幣。然後按第二個人的情況分類討論。如果是 £1 硬幣，你此後是否已經安全？如果是 £2 硬幣，你回到了哪一種情況，能否運用第 (i) 部分的結果？

階段 3 把隊伍看成路徑

涵蓋：第 (iii) 部分

> **想一想** 逐一分情況討論的方法對 $n = 3$ 仍然可行，但過程冗長。不妨改為畫圖：以你手上 £1 硬幣的數目對已服務的人數作圖。一條成功的隊伍看起來是怎樣的？

階段 4　反射

涵蓋：第 (iii) 部分

> **停一停，試一試**　取一條壞路徑（path），即到達高度 -1 的路徑。把它首次到達 -1 之前的部分沿直線 $y=-1$ 作反射（reflection）。新路徑的起點和終點在哪裏？數出這兩點之間所有路徑的數目。

背後的數學

卡塔蘭數

當 $m=n$（£1 硬幣剛好足夠）時，成功隊伍的數目是

$$\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n-1}=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n},$$

即第 n 個卡塔蘭數 C_n：$1,1,2,5,14,42,132,\ldots$。Richard Stanley 的著作 *Catalan Numbers* 列出了超過二百種由卡塔蘭數計算數目的事物。其中包括：把 n 對括號正確排列的方法數目（「(())()」是允許的，「())(()」則不允許，理由正是上述的硬幣論證，只要把「(」看成 £1、「)」看成 £2）、用互不相交的對角線把一個 $n+2$ 邊形分割成三角形的方法數目，以及為 $n+1$ 個因子的乘積加上括號的方法數目。

隨機遊走

隊伍就是隨機遊走（random walk），而反射原理是研究隨機遊走的基本工具之一。舉例說，它可以證明由 0 出發的公平隨機遊走必定終會返回 0，也可以證明它在最初 $2n$ 步一直保持嚴格為正的概率是 $\frac{1}{2}\binom{2n}{n}2^{-2n}\approx\frac{1}{2\sqrt{\pi n}}$。在連續的形式下，把同樣的反射論證應用於布朗運動（Brownian motion），便可得出其最大值的分佈（distribution）。這是某些金融期權定價的基礎，這類期權的回報取決於股價有否越過某個界限。

伯特蘭投票問題

1887 年，約瑟夫·伯特蘭（Joseph Bertrand）提出：在一場選舉中，候選人 A 得 a 票，B 得 $b < a$ 票，那麼 A 在整個點票過程中一直嚴格領先的概率是多少？答案是 $\frac{a-b}{a+b}$，同年由 Désiré André 證明，他的論證通常被視為反射原理（不過歷史學家指出，André 實際的證明用的是一個稍有不同的雙射）。我們的抽獎券問題是一個容許平手的變體：成功的意思是 £1 的數目從不低於 £2 的數目。其中一道練習會由我們的答案推導出伯特蘭的答案。

延伸練習

1 **分情況處理三枚。**仿照第 (ii) 部分，以隊伍中最初幾個人為條件來證明第 (iii) 部分，看看反射原理省卻了多少工夫。

2 **伯特蘭投票問題。**在一場選舉中，A 得 a 票，B 得 $b < a$ 票。證明 A 在整個點票過程中一直嚴格領先的概率是 $\frac{a-b}{a+b}$。（提示：第一票必須投給 A；此後，A 落後於 B 的票數絕不可多於…。）

3 **括號。**列出三對括號的 5 種正確排列，以及把五邊形分割成三角形的 5 種方法。你能找出兩者之間的一個雙射嗎？

4 **一張 £5 紙幣。**一條隊伍中有 m 個人拿着 £1 硬幣，n 個人拿着 £5 紙幣，而一張票的價錢是 £1。解釋為何反射原理不再給出簡單的答案。（這個推廣困難得多。）

延伸閱讀

- **William Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. 1**（Wiley），第 III 章。有關隨機遊走和反射原理的經典論述。
- **Richard Stanley, *Catalan Numbers***（Cambridge University Press）。超過二百種詮釋，並附練習。
- **Marc Renault, "Lost (and found) in translation: André's actual method and its application to the generalized ballot problem"**，*American Mathematical Monthly* 115 (2008)。反射原理的歷史。

完整的引導式解答見第 9.10 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch09/ballot.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com