9.1 直線分割平面

工作紙

題目

STEP II 1990，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/90-s2-q4

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

> **停一停，試一試** 仔細畫出 $n = 1, 2, 3, 4$ 的情況，並保持各直線處於一般位置（general position）（沒有兩條平行，沒有三條共點）。數一數每種情況中線段和區域的數目。你能猜出當中的規律嗎？

階段 1　數算線段

涵蓋：線段的數目

> **停一停，試一試** 每次只看一條直線。其餘的直線中有多少條與它相交？交點共有多少個不同的位置？這些交點把它分成多少段？然後乘以直線的數目。

階段 2 加上一條直線會怎樣？

涵蓋：區域的數目

想一想 先畫 $n-1$ 條直線，再加上第 n 條。它被其餘的直線分成 n 條線段。每條線段會對它所穿過的區域造成甚麼影響？

階段 3　求解遞歸關係

涵蓋：區域的數目、公式

> **想一想**　你應該得到 $R(n) = R(n-1) + n$。由 $R(0) = 1$（或 $R(1) = 2$）開始逐項相加，或以數學歸納法（induction）證明該公式。

背後的數學

喬裝的歐拉公式

以下是第二個證明，它不僅推導出答案，更解釋了答案從何而來。把這些直線組成的圖形看成一幅地圖：交點是頂點（vertices），線段是邊（edges），區域是面（faces）。圖中有 $V = \binom{n}{2}$ 個頂點（每一對直線對應一個）和 $E = n^2$ 條邊。無限長的線段只有一個端點，所以我們額外加上一個「在無窮遠處」的頂點，讓它們全部在那裏相遇；這樣，整幅圖就成為畫在球面上的地圖（想像把平面包在一個球上，無窮遠點位於球頂）。由 Section 7.9 的歐拉公式 $V - E + F = 2$ 可得

$$\left(\binom{n}{2} + 1\right) - n^2 + F = 2, \qquad \text{所以} \qquad F = n^2 - \frac{n(n-1)}{2} + 1 = \frac{n^2 + n + 2}{2}.$$

同一個數，卻來自完全不同的方向。這些區域還可以整齊地分成兩類：其中 $2n$ 個是無界的（每兩條相鄰的無限射線之間有一個），其餘 $\frac{1}{2}(n^2 + n + 2) - 2n = \binom{n-1}{2}$ 個是有界的。

二項式係數與高維空間

這條公式可以寫成

$$R(n) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2},$$

而這並非巧合。把圖形轉動，使得沒有一條直線是水平的。一個下方有界的區域必有一個最低點，而這個點必定是交點；每個交點又恰好是一個區域（即它正上方的那個）的最低點：這樣就得到 $\binom{n}{2}$ 個區域，每一對直線對應一個。其餘每個區域都向下無限延伸，

因而會與一條畫在所有交點下方很遠處的水平線相遇；那 n 條直線把這條水平線切成 $n+1$ 個區間，每個這樣的區域內各有一個。合共 $\binom{n}{2}+n+1$ 個。在三維空間中，n 個處於一般位置的平面把空間切成

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}=\frac{n^3+5n+6}{6}$$

塊（即*蛋糕數*（cake numbers）$1,2,4,8,15,26,\ldots$），而這個規律在任何維數都成立。證明用的是同一個歸納法：新加的平面被其餘平面切成若干區域，其排列方式就如平面上的直線所分成的區域，而每個這樣的區域都把一塊空間一分為二。

施泰納與超平面排列

直線和平面所分割出的區域數目的公式，是施泰納（Jakob Steiner）在 1826 年發現的。今天，它是*超平面排列*（hyperplane arrangements）理論的起點；這套理論點算任意一組直線、平面及其高維類比所形成的區域數目，包括並非處於一般位置的情況。Thomas Zaslavsky 在 1975 年證明了一條非凡的定理：利用一個記錄了哪些超平面相交的多項式，就可以數出任何排列的區域數目。同樣的想法也出現在機器學習之中：由「ReLU」單元構成的神經網絡，會用超平面把輸入空間切成多個區域，而區域的數目正好衡量它所能表示的函數有多複雜。

延伸練習

1 **圓。**證明：若 n 個圓中每兩個都交於兩點，且沒有三個圓共點，則它們把平面分成 n^2-n+2 個區域。

2 **平行線。**若 n 條直線中有 k 條互相平行（其餘方面均處於一般位置），共有多少個區域？

3 **蛋糕數。**用歸納法證明：n 個處於一般位置的平面把空間分成 $\frac{1}{6}(n^3+5n+6)$ 個區域。

4 **會失效的規律。**在圓周上取 n 個點，並把每一對點用弦連起來，其中沒有三條弦在圓內交於同一點。當 $n=1,2,3,4,5$ 時，分別得到 $1,2,4,8,16$ 個區域。數一數 $n=6$ 時的區域數目。（*提示*：使用歐拉公式；每四個點給出一個交點。）證明區域的數目是 $1+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}$。

延伸閱讀

► **Ronald Graham, Donald Knuth & Oren Patashnik, *Concrete Mathematics***（Addison-Wesley），第 1 章。開首討論的正是這個問題，還有「薄餅」和「之字形」的變化

題。

- **Miklós Bóna, *A Walk Through Combinatorics***（World Scientific）。一本平易近人的入門教材，設有歸納法、圖和歐拉公式等章節。
- **Richard Guy, "The strong law of small numbers"**，*American Mathematical Monthly* 95 (1988)。收錄了許多看似明顯、其實不成立的規律，包括練習中的圓問題。

完整的引導式解答見第 9.1 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch09/lazy-caterer.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com