8.8 週期三蘊含混沌

工作紙

題目

STEP III 2025，第 2 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2025 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

> **想一想**　$y = 7 - 2|x|$ 的圖像是甚麼樣子的？它在哪裏與直線 $y = x$ 相交？它把區間 $[-7, 7]$ 送到哪裏？

階段 1　$\mathrm{f} \circ \mathrm{f}$ 的圖像

涵蓋：第 (i)(a) 部分

> **想一想**　當 x 由 -7 走到 0 時，$\mathrm{f}(x)$ 會取遍整個 $[-7, 7]$。那麼 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x))$ 在這個區間（interval）上會怎樣變化？由 0 到 7 又如何？

階段 2 **解** $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) = x$

涵蓋：第 (i)(b) 及 (c) 部分

想一想 其中兩個解是 f 的不動點（fixed point）。為甚麼它們也滿足 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) = x$？

停一停，試一試 對於任何其他解 p，設 $q = \mathrm{f}(p)$，則 $\mathrm{f}(q) = p$。p 和 q 可以同號嗎？如果不可以，試寫出關於 p 和 q 的兩條線性方程（linear equation）並求解。檢查在 $[-7, 7]$ 之外沒有解。

階段 3　遲一步才進入循環（cycle）

涵蓋：第 (i)(d) 部分

想一想　由 $a = \frac{28}{5}$ 出發，計算數列的首幾項。它在甚麼時候進入 2-循環？

階段 4 三循環

涵蓋：第 (ii)(a) 及 (b) 部分

想一想 計算由 $a = 1$ 和 $a = -\frac{7}{9}$ 出發的數列。

停一停，試一試 在 $[-7, 7]$ 上，$\mathrm{f} \circ \mathrm{f} \circ \mathrm{f}$ 的圖像由多少段直線組成？每一段最多可以與 $y = x$ 相交多少次？數一數你已經知道的解。

階段 5　遲一步才進入 3-循環

涵蓋：第 (ii)(c) 部分

> **停一停，試一試**　仿照第 (i)(d) 部分的做法，由循環 $1 \to 5 \to -3$ 倒推回去。f 會把哪些數映射到 1？選取不在循環內的那一個，然後繼續往回推。

背後的數學

任何長度的循環

第 4 階段的點算方法適用於任何步數。把 f^n 記作施行 f 共 n 次。在 $[-7,7]$ 上，f^n 的圖像有 2^n 段直線段，每段都走遍整個高度，所以 $f^n(x) = x$ 恰好有 2^n 個解。其中有些解的週期較短，是某個整除 n 的 d，但對每個 d 而言，這樣的解最多只有 2^d 個，而且

$$2^n > 2^{n/2} + 2^{n/3} + \cdots + 2^1 \quad \text{（對所有滿足 } d < n \text{ 的 } n \text{ 的因數求和）}$$

因為所有小於 n 的因數都不超過 $n/2$，而 $2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{\lfloor n/2 \rfloor} < 2^{\lfloor n/2 \rfloor + 1} \le 2^n$。所以對每個 n，都存在週期恰好為 n 的點。這個函數有任何長度的循環。

為甚麼週期三迫使一切出現

李天岩與約克的定理指出，這並非我們這個函數獨有的性質：任何由區間映到自身的連續函數 g，只要有一個 3-循環，就有任何長度的循環。證明所用的不外乎介值定理（intermediate value theorem），而我們的 3-循環正好展示了證明的思路。

> **想一想**　設 $I_1 = [-3,1]$ 及 $I_2 = [1,5]$，即循環 $1 \to 5 \to -3$ 各點之間的兩個區間。f 把它們分別送到哪裏？

在 I_2 上，f 由 $f(1) = 5$ 遞減至 $f(5) = -3$，所以 $f(I_2) = [-3,5] = I_1 \cup I_2$。在 I_1 上，f 由 $f(-3) = 1$ 升至 $f(0) = 7$，再降至 $f(1) = 5$，所以 $f(I_1) = [1,7]$，它包含 I_2。留意我們只用到循環的三個點：任何具有 3-循環 $a \to b \to c$、$a < b < c$ 的連續函數，都以同樣的

方式覆蓋它的區間。我們可以用一幅圖來概括哪個區間覆蓋哪個區間（圖 8.8.3）：

$$I_1 \to I_2, \qquad I_2 \to I_1, \qquad I_2 \to I_2.$$

定理於是由以下兩個事實推出，兩者都是介值定理的推論。

- 如果 $g(I) \supseteq I$，則 g 在 I 內有一個不動點。（對 $g(x) - x$ 應用介值定理。）
- 如果 $g(I) \supseteq J$，則存在一個較小的閉區間 $I' \subseteq I$，使得 $g(I') = J$ 恰好成立。

要找一個週期為 n 的點，可沿着圖中的迴路 $I_2 \to I_2 \to \cdots \to I_2 \to I_1 \to I_2$ 走：$n-1$ 步留在 I_2 之內，另有一步走出去到 I_1 再回來。反覆運用第二個事實，我們可以把 I_2 收窄成一個由起始點組成的區間，這些起始點的軌道（orbit）都依循這條路線，而 g^n 把這個區間映滿整個 I_2。第一個事實給出一點 x，滿足 $g^n(x) = x$，並且只在第 $n-1$ 步到訪 I_1。它的週期不可能小於 n，否則對 I_1 的到訪便會在更早的時候重複出現。（這裏有一個微妙之處，因為 I_1 和 I_2 共有一點 1；驗證這不會造成問題，留作習題。）

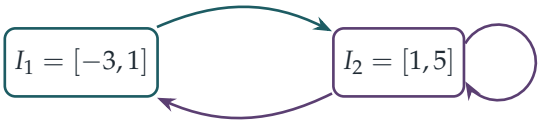


圖 8.8.3 3-循環的覆蓋圖（covering diagram）。由一個區間指向另一個區間的箭嘴，表示前者的像包含後者。圖中每一條迴路都給出函數的一個循環：迴路 $I_2 \to I_2$ 給出一個不動點，$I_1 \to I_2 \to I_1$ 給出一個 2-循環，而先繞 I_2 處的迴路 $n-1$ 次再到訪 I_1，則給出一個長度為 n 的循環。

沙可夫斯基定理

李天岩與約克並不是最先發現的人。早在 1964 年，烏克蘭數學家沙可夫斯基（Oleksandr Sharkovskii）已經證明了一個完備得多的結果，以俄文發表於《烏克蘭數學雜誌》（*Ukrainian Mathematical Journal*），其後十年間西方對此一無所知。把正整數排列成

$$3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \ldots,\ \ 2\cdot 3,\ 2\cdot 5,\ \ldots,\ \ 2^2\cdot 3,\ 2^2\cdot 5,\ \ldots,\ \ \ldots,\ \ 2^3,\ 2^2,\ 2,\ 1:$$

先是由 3 開始的奇數，然後是奇數的兩倍，再然後是奇數的四倍，如此類推，最後以 2 的冪按遞減次序作結。沙可夫斯基定理指出：如果區間上的一個連續函數有一個長度為 m 的循環，那麼凡是在這個列表中排在 m 之後的長度，它都有相應的循環。由於 3 排在最前，週期 3 便蘊涵所有週期。而且這個定理是最佳的：對每個 m，都存在一個函數，它有長度為 m 的循環，卻沒有列表中排在更前的長度的循環。列表末端 2 的冪，正正就是 Section 8.7 中邏輯斯蒂映射（logistic map）的倍週期級聯（period-doubling cascade），而 3-循環在那裏出現於 $k = 1 + \sqrt{8}$。

帳篷映射與邏輯斯蒂映射

作代換 $x = 14y - 7$，它把 $[0,1]$ 映滿 $[-7,7]$。簡單計算可見，f 變成了帳篷映射（tent map）

$$T(y) = \begin{cases} 2y & 0 \le y \le \tfrac{1}{2}, \\ 2 - 2y & \tfrac{1}{2} \le y \le 1, \end{cases}$$

而再作代換 $u = \sin^2(\pi y/2)$，就把帳篷映射變成邏輯斯蒂映射 $u \mapsto 4u(1-u)$。所以這道題目中的函數，其實就是 Section 8.7 中那個混沌的邏輯斯蒂映射，只是被拉直了。它的 $f^3(x) = x$ 的八個解，對應於 $\sin^2(8\theta) = \sin^2\theta$ 在 $[0, \tfrac{\pi}{2}]$ 內的八個解。

延伸練習

1. **一個 4-循環。**利用覆蓋圖預測 f 的一個 4-循環應該在哪裏（三步在 I_2，一步在 I_1）。然後把它精確地求出來。（提示：這個循環有三個正的點和一個負的點；寫下四條線性方程。）

2. **微妙之處。**在「週期 3 蘊涵週期 n」的證明中，解釋為甚麼當 $n \ge 4$ 時，所找到的點 x 不可能是點 1（或原來那個 3-循環的任何一點）。

3. **有週期 5 而沒有週期 3。**草繪一個在 $[1,5]$ 上的連續函數的圖像，它滿足 $g(1) = 3$、$g(3) = 4$、$g(4) = 2$、$g(2) = 5$、$g(5) = 1$，並以直線連接這些點。就區間 $[1,2]$、$[2,3]$、$[3,4]$、$[4,5]$ 畫出它的覆蓋圖。你能找到一條長度為 3 的迴路嗎？（沙可夫斯基定理說它沒有 3-循環。）

4. **帳篷映射。**驗證 $x = 14y - 7$ 把 f 變成帳篷映射。然後證明帳篷映射把以二進制寫成的 y 加倍，並且每當首位數字是 1 時就把所有數字反轉；再利用這一點找出它的 3-循環。

延伸閱讀

- **Tien-Yien Li & James Yorke, "Period three implies chaos"**, *American Mathematical Monthly* 82 (1975)。篇幅短小，懂得介值定理便可讀懂。
- **Robert Devaney, *A First Course in Chaotic Dynamical Systems*** (CRC Press)。為大學本科生而寫；涵蓋帳篷映射、邏輯斯蒂映射和沙可夫斯基定理，並附完整證明。
- **Keith Burns & Boris Hasselblatt, "The Sharkovsky theorem: a natural direct proof"**, *American Mathematical Monthly* 118 (2011)。一個運用覆蓋圖的現代證明。

完整的引導式解答見第 8.8 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch08/period-three.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com