8.7 可以解出的混沌

工作紙

題目

STEP I 2014，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/14-s1-q6

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

> **想一想**　你以前在哪裏見過 $4s(1-s)$ 這個式子，其中 $s=\sin^2\theta$？哪一條恆等式把 $\sin^2\theta$、$\cos^2\theta$ 和 $\sin 2\theta$ 聯繫起來？

階段 1　猜出規律

涵蓋：第 (i) 部分：猜想

> **想一想**　已知 $u_0=\sin^2\theta$，那麼 $1-u_0$ 是甚麼？利用二倍角公式（double-angle formula）把 u_1 寫成單一個平方，然後對 u_2 照做一次。

階段 2 證明猜想

涵蓋：第 (i) 部分：證明

想一想 對 n 用歸納法（induction）證明你的猜想。歸納步驟的計算與求 u_1 時完全相同，只是把 θ 換成 $2^n\theta$。

階段 3 變數代換

涵蓋：第 (ii) 部分：p、q、r 須滿足的條件

停一停，試一試 把 $v_n = \alpha u_n + \beta$ 代入 v_{n+1} 的遞推式，再整理成 u_{n+1} 的表達式。與 $4u_n - 4u_n^2$ 比較：你得到多少條方程？有多少個未知數？多出來的那條方程就是所求的條件。

階段 4 例子

涵蓋：第 (ii) 部分：例子

> **想一想** 讀出 p、q、r 的值，並驗證條件成立。求出 α 和 β，以及初始值 u_0。哪一個角 θ 滿足 $\sin^2\theta = u_0$？

背後的數學

數列為何無法預測

公式 $u_n = \sin^2(2^n\theta)$ 看來已是故事的結局：任何一項都可以直接算出。但請細看它說了甚麼。由於 $\sin^2$ 的週期（period）是 π，所以只有 $2^n\theta$ 模（modulo）π 的值才有影響。設 $\theta = \pi x$，其中 $0 \le x < 1$，並把 x 寫成二進制（binary）：

$$x = 0.b_1b_2b_3\ldots \quad (\text{底為}2).$$

乘以 2 會把二進制小數點向右移一位，而把結果取模 1，就是丟掉越過小數點的那個數位。所以 u_n 只取決於 x 由 b_{n+1} 起的二進制數位。邏輯斯諦映射每走一步，就多讀取初始值的一個數位，同時丟掉最前面的一個。

這就是*對初始條件的敏感依賴*（sensitive dependence on initial conditions），也是混沌的決定性特徵。兩個初始值若在首 20 個二進制位上相同（約六個小數位），它們產生的數列一般會在大約 20 步之內吻合，其後便毫無關係（圖 8.7.1）。要預測 u_{100}，你需要知道 u_0 準確至 100 個二進制位。初始角度的任何誤差，無論多小，每一步都會加倍。（種羣數量 u 本身的誤差並非每次都以完全相同的倍數增長，因為這個映射對 $[0,1]$ 某些部分的拉伸比其他部分大，但平均而言，它的增長率是一樣的。）公式幫不上忙：它只是令這個機制顯現出來。

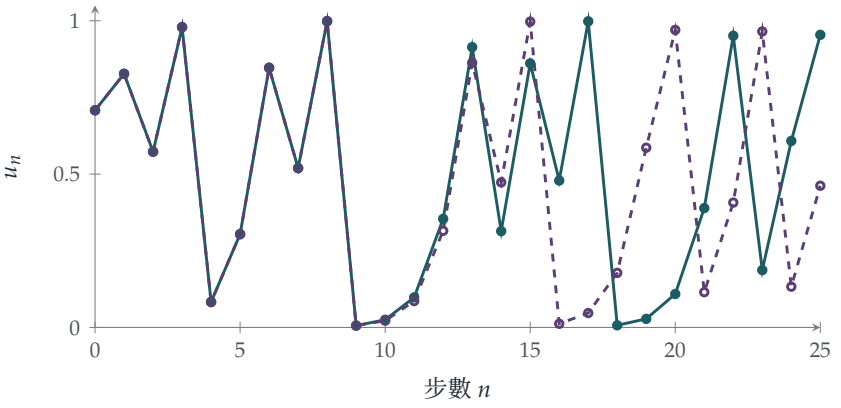


圖 8.7.1 $k = 4$ 的邏輯斯諦映射的兩個數列，分別由 $\sin^2(1)$（藍綠色）和 $\sin^2(1.00001)$（紫紅色虛線）開始。在大約頭十步內兩者無法分辨，到第 12 步已有明顯差別，其後便毫無關係：到第 12 步，角度之差 10^{-5} 已經加倍了十二次，變成約 $2^{12} \times 10^{-5} \approx 0.04$。

週期點無處不在

這個公式還能找出映射的每一個循環（cycle）。數列在 N 步之後回到初始值，當且僅當 $\sin^2(2^N\theta) = \sin^2\theta$，即 $2^N\theta \equiv \pm\theta \pmod{\pi}$。所以 $\theta = m\pi/(2^N - 1)$ 或 $\theta = m\pi/(2^N + 1)$ 給出一個週期整除 N 的點。例如 $\theta = \pi/5$ 滿足 $4\theta \equiv -\theta$，所以 $\sin^2\frac{\pi}{5} \to \sin^2\frac{2\pi}{5} \to \sin^2\frac{4\pi}{5} = \sin^2\frac{\pi}{5}$ 是一個 2-循環。每一個週期都有對應的週期點（periodic point），而且它們在 $[0,1]$ 中稠密（dense）：在每一個區間內，無論多小，都有一個初始值使數列重複出現。然而每一個週期點都是不穩定的，因為任何誤差都會加倍。稠密的週期點，卻把附近的一切都推開，這是混沌的第二個標誌。

通往混沌之路

對於較小的 k，並沒有公式可用，而數列的行為會隨 k 劇烈變化（圖 8.7.2）。當 $1 < k < 3$ 時，每一個由 $(0,1)$ 內出發的數列都會趨於不動點（fixed point）$1 - 1/k$。在 $k = 3$ 時，不動點變得不穩定，由一個 2-循環取而代之（這是 STEP II 2002 Q5 的主題；見延伸練習）。在 $k = 1 + \sqrt{6} \approx 3.449$ 時，2-循環讓位予 4-循環，然後是 8-循環，週期加倍來得愈來愈快，直至 $k \approx 3.5699$ 時，循環的長度變成無限，混沌由此開始。在混沌區域之內還有一些有序的窗口：最明顯的一個在 $k = 3.83$ 附近，其中有一個 3-循環，那是 Section 8.8 的主題。

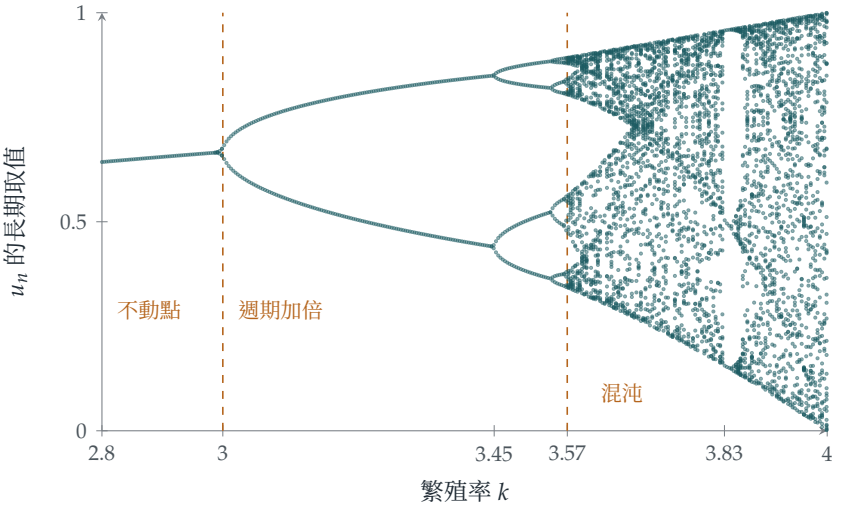


圖 8.7.2　邏輯斯諦映射的分岔圖（bifurcation diagram）。對每一個 k，由 $u_0 = 0.31416$ 開始把映射迭代 300 次，然後畫出其後的 40 個值。單一個不動點在 $k = 3$ 時分裂成一個 2-循環，然後是 4、8、…，直至在 $k = 3.57$ 附近進入混沌。$k = 3.83$ 附近那道淺色的垂直空隙，就是含有穩定 3-循環的窗口。在 $k = 4$ 時，這些值填滿了整個 $[0, 1]$。

費根鮑姆常數

1975 年，費根鮑姆（Mitchell Feigenbaum）在洛斯阿拉莫斯（Los Alamos）工作時，用一部可編程的袖珍計算機，量度了週期加倍時的各個 k 值：$k_1 = 3$、$k_2 \approx 3.4495$、$k_3 \approx 3.5441$、$k_4 \approx 3.5644$、…。他留意到這些間距以一個固定的倍數縮小，

$$\frac{k_n - k_{n-1}}{k_{n+1} - k_n} \to 4.6692\ldots,$$

然後更令人驚訝地發現，同一個數 4.6692… 也出現在 $x \mapsto k\sin(\pi x)$ 之中，以及其他所有只有單一個峯、而峯頂像拋物線般圓滑（即二次極大值，quadratic maximum）的光滑映射之中。這個常數對這一整類映射是普適（universal）的；至於峯頂較平坦的映射，例如形狀像 $-x^4$ 的那種，則各有自己的普適常數。其後，人們在滴水的水龍頭、受熱的流體和電子電路的實驗中都量度到這個常數。要解釋箇中原因，需要借用相變（phase transition）物理學的想法，而嚴格的證明要到 1982 年才由 Oscar Lanford 藉助電腦完成。

同一招，用三次

第 (ii) 部分的代換是共軛（conjugacy）的一個例子：若一個變數代換能把一個映射變成另一個，這兩個映射便稱為共軛，而它們的動力學行為完全相同。本題證明了每一個滿

足該條件的二次映射，都與 $k = 4$ 的邏輯斯諦映射共軛，而後者又透過 $u = \sin^2\theta$，成為喬裝了的角度加倍。（嚴格來說，最後這一環是半共軛（semiconjugacy）：θ 和 $\pi - \theta$ 給出相同的 u，所以這個變數代換並非一對一（one-to-one）。邏輯斯諦映射真正共軛的對象是帳篷映射（tent map），即當 $t \le \frac{1}{2}$ 時 $t \mapsto 2t$、當 $t \ge \frac{1}{2}$ 時 $t \mapsto 2 - 2t$，所用的代換是 $u = \sin^2\frac{\pi t}{2}$，它在 $[0,1]$ 上是一對一的。）在 Section 2.8 中，你遇過 $x \mapsto x^2 - 2$，它由 $x = 2\cos\theta$ 解出，角度每一步加倍；它同樣滿足該條件（不妨試試）。所以這些全都是同一個映射的不同喬裝。在 Section 8.8 中，這個家族的第三位成員將會登場：一個由直線構成的映射，即帳篷映射。

延伸練習

1 **邏輯斯諦映射的循環。**試做 STEP II 2002，第 5 題（step.maths.org/questions/02-s2-q5）。然後證明只有當 $k > 3$ 時才存在 2-循環。

2 **平方減二。**證明 $v_{n+1} = v_n^2 - 2$ 滿足第 (ii) 部分的條件（把它寫成 $-pv_n^2 + qv_n + r$，其中 $p = -1$）。求 α 和 β，並驗證你的答案與 $v_n = 2\cos(2^n\phi)$ 一致。

3 **一個 3-循環。**利用公式 $u_n = \sin^2(2^n\theta)$，求 $u_{n+1} = 4u_n(1-u_n)$ 的一個 3-循環。（提示：試試 $\theta = \pi/7$，或 $\theta = \pi/9$。）週期恰好為 3 的點有多少個？

4 **丟失數位。**電腦儲存數字時，大約準確至 53 個二進制位。如果你在電腦上迭代 $u_{n+1} = 4u_n(1-u_n)$，大約多少步之後，計算出來的值便與真正的數列毫無關係？到那時，計算出來的數列是否就沒有用處？

延伸閱讀

- **Robert May，「Simple mathematical models with very complicated dynamics」**，*Nature* 261 (1976)。經典之作，至今仍然十分易讀。
- **James Gleick，*Chaos: Making a New Science***（Penguin）。講述梅、費根鮑姆以及混沌被發現的故事。
- **Steven Strogatz，*Nonlinear Dynamics and Chaos***（CRC Press），第 10 章。一維映射、邏輯斯諦映射和費根鮑姆常數，程度相當於大學一年級。
- **Ian Stewart，*Does God Play Dice?***（Penguin）。一本介紹混沌的科普讀物，其中有一章對邏輯斯諦映射講解得很好。

完整的引導式解答見第 8.7 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch08/solvable-chaos.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com