8.5 格力犬追逐格力犬

工作紙

題目

STEP III 1988，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/88-s3-q10

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想　根據對稱性，四隻狗在每一刻構成甚麼形狀？它的中心在哪裏？

階段 1　運動方向

涵蓋：速度（velocity）與半徑之間的夾角

想一想　A 筆直地朝 B 跑去。在三角形 OAB 中，各個角是多少？AB 與 AO 的夾角是多少？

階段 2 微分方程（differential equation）

涵蓋：求解路徑

> **停一停，試一試** 把 A 的速度分解為徑向（radial）分量 $\dot{r}$ 和橫向（transverse）分量 $r\dot{\theta}$。將兩者相除得出 $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}$，然後求解。

階段 3 n 隻狗

涵蓋：推廣至 n 隻狗的情況

> **想一想** 對於正 n 邊形，三角形 OAB 中位於 O 的角是多少？兩個底角又是多少？以這個角取代 $45°$，重做第二階段。

背後的數學

無窮多圈，有限距離

徑向速率 $\dot{r} = -v\sin\frac{\pi}{n}$ 是常數，所以各隻狗在時間 $T = \frac{r_0}{v\sin(\pi/n)}$ 之後到達中心，每隻狗跑過的距離是 $vT = \frac{r_0}{\sin(\pi/n)}$。對於邊長為 s 的正 n 邊形，$r_0 = \frac{s}{2\sin(\pi/n)}$，所以每隻

狗跑過的距離是

$$\frac{s}{2\sin^2(\pi/n)}.$$

對於四隻狗，這恰好是 s：每隻狗跑過的距離正好是一條邊的長度。（這裏有一個巧妙的看法：B 的速度始終與 AB 垂直，所以它不會改變距離 AB；只有 A 以速率 v 沿着 AB 筆直前進的運動才會縮短兩者的距離，而這個距離最初是 s。）對於三隻狗，距離是 $\frac{2}{3}s$；對於六隻狗，距離是 $2s$。然而在每一種情形下，螺線都繞着中心轉無窮多圈，因為當 $r \to 0$ 時 $\theta \to \infty$。一條長度有限卻轉了無窮多圈的曲線並不是悖論：那些圈縮小得足夠快。

對數螺線

曲線 $r = \lambda e^{-k\theta}$ 稱為對數螺線（logarithmic spiral）或等角螺線（equiangular spiral）：它與每一條從中心出發的射線相交的角度都相同。它出現在大自然之中，例如鸚鵡螺的殼和某些星系的旋臂，因為保持形狀不變的生長就會產生這種曲線。雅各布·伯努利（Jacob Bernoulli）對它極為着迷，甚至要求把它刻在自己的墓碑上，並附上格言 *Eadem mutata resurgo*（「縱然改變，我仍將依舊復起」），指的是它在任何尺度下看起來都一樣。結果石匠刻的卻是一條阿基米德螺線（Archimedean spiral）。

實際中的追逐

「純追逐」（pure pursuit），即始終筆直朝着目標前進，是導彈或捕食者最簡單的導引法則。但它並不是最好的：朝着目標將會到達的位置前進（「比例導引」，proportional navigation）更有效率，而現代導彈以及某些捕食者（例如蜻蜓和隼）實際上正是這樣做的。追逐與逃避的數學在二十世紀自成一門學科，名為微分博弈（differential games）。

延伸練習

1. **巧妙的論證。**仔細解釋為何在四隻狗的問題中，距離 AB 恰好以速率 v 減少，並由此推出四隻狗在時間 s/v 之後相遇。

2. **三隻狗。**三隻狗從邊長為 s 的等邊三角形的三個角出發。求每條路徑的方程、牠們相遇所需的時間，以及每隻狗跑過的距離。

3. **轉了多少圈？**設四隻狗出發時距離中心 100 m，牠們轉了完整一圈之後距離中心多近？轉了多少個完整的圈之後，牠們與中心的距離在 1 mm 以內？

4. **兩隻狗。**當 $n = 2$（兩隻狗面對面）時會怎樣？公式是否仍然有意義？

延伸閱讀

- **Paul Nahin, *Chases and Escapes: The Mathematics of Pursuit and Evasion***（Princeton University Press）。關於追逐曲線的一切，從 Bouguer 到導彈。
- **Eli Maor, *e: The Story of a Number***（Princeton University Press）。內容包括對數螺線和伯努利的墓碑。
- **D'Arcy Thompson, *On Growth and Form***（Cambridge University Press）。講述大自然中的數學的經典著作，包括螺線式的生長。

完整的引導式解答見第 8.5 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch08/pursuit.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com