8.4 盤旋趨向圓

工作紙

題目

STEP III 2015，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/15-s3-q8

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想　兩條方程其實都暗藏 $x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y$ 和 $x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x$ 這兩個組合。它們在極坐標中是甚麼？

階段 1　用極坐標（polar coordinates）處理第 (i) 部分

涵蓋：第 (i) 部分

想一想　把方程重新整理，使它由 $x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y$ 和 $x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x$ 兩個組合構成。展開來驗證一下。

停一停，試一試　把這兩個組合分別換成 $r\,\mathrm{d}r$ 和 $r^2\,\mathrm{d}\theta$。你會得到一條怎樣的、以 θ 表示 r 的微分方程（differential equation）？把它解出來。

階段 2　第 (ii) 部分

涵蓋：第 (ii) 部分

想一想　新方程就是原來的方程，再加上一些含有 $x^2 + y^2 = r^2$ 的項。把新增的項歸併起來：出現的是兩個組合中的哪一個？

停一停，試一試　你應該得到 $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = r^3 - r$。設 $u = r^{-2}$。u 滿足哪一條線性方程（linear equation）？

階段 3 **三類解**

涵蓋：解的形狀

想一想 就 $A = 0$、$A > 0$ 和 $A < 0$ 三種情況，分別考察 $r^2 = \frac{1}{1+Ae^{2\theta}}$。在每種情況下，當 $\theta \to -\infty$ 時以及當 θ 增大時，r 會怎樣變化？當 $A < 0$ 時，θ 可以取哪些值？

背後的數學

極限環

龐加萊（Henri Poincaré）在 1880 年代研究平面上微分方程的定性行為時，引入了極限環。不妨把題目中的方程理解為描述一個點在平面上運動的路徑。單位圓是一條孤立的閉軌道（closed orbit），附近的每條軌道都會纏繞着向它靠近（或遠離它，視乎時間的方向而定）。1926 年，荷蘭工程師 Balthasar van der Pol 在一個裝有真空管的電路中發現了極限環，並提出類似的方程可以描述心臟的跳動。凡是具有自持而穩定節奏的系統，都可以用極限環作為模型：生理時鐘、神經脈衝、捕食者與獵物種羣數量的週期。

平面上沒有混沌

龐加萊—本迪克松定理（Poincaré–Bendixson theorem）指出，對於平面上的光滑系統，如果一條軌道一直留在某個有界區域內，又不趨近任何平衡點（equilibrium），它就必定趨近一條閉軌道。所以在二維的情況下，長期行為只限於平衡點和環：混沌（chaos）沒有容身之處，因為軌道不能相交。混沌至少需要三維，正如洛倫茲（Edward Lorenz）在 1963 年以他那著名的三變數對流模型（「蝴蝶」）所發現的那樣。至於離散時間的情況，我們會在 Section 8.7 看到，即使只有一維，混沌也可能出現。

一個未解決的問題

1900 年，希爾伯特（David Hilbert）在他的第十六問題中問道：當 P 和 Q 是 n 次多項式時，系統 $x' = P(x,y)$，$y' = Q(x,y)$ 最多可以有多少個極限環？即使是 $n = 2$ 的情況，答案至今仍然未知：已知有些系統具有四個極限環，但是否可能有更多，則無人知曉。在希爾伯特的問題之中，這是極少數至今仍然完全懸而未決的一個。

延伸練習

1. **螺線。**對於第 (i) 部分的解 $r = e^{-\theta}$，證明曲線與每條由原點出發的射線都以相同的角度 45° 相交。（這就是對數螺線又稱為等角螺線（equiangular spiral）的原因。）

2. **極坐標恆等式。**證明 $x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r$ 和 $x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = r^2\,\mathrm{d}\theta$。

3. **隨時間變化的系統。**考慮系統 $\dot{r} = r(1 - r^2)$，$\dot{\theta} = 1$。證明當 $t \to \infty$ 時，每個滿足 $r(0) > 0$ 的解都趨近單位圓。把這個系統以 x 和 y 表示。

4. **兩個環。**找出一個形如 $\dot{r} = f(r)$，$\dot{\theta} = 1$ 的系統，使它有兩個極限環，分別位於 $r = 1$ 和 $r = 2$，其中一個是吸引的（attracting），另一個是排斥的（repelling）。

延伸閱讀

- **Steven Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos***（CRC Press）。第 7 章講述極限環和龐加萊–本迪克松定理。
- **Steven Strogatz, *Sync***（Hyperion）。一本講述自然界中的節奏與同步現象的科普讀物。
- **James Gleick, *Chaos: Making a New Science***（Penguin）。講述洛倫茲與發現混沌的故事。

完整的引導式解答見第 8.4 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch08/limit-cycle.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com