8.3 收穫種羣

工作紙

題目

STEP II 1995，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/95-s2-q8

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想　在動手求解之前，先把增長率 $(2K - x)x$ 當作 x 的函數，畫出它的略圖。它在哪裏為零？在哪裏為正？這告訴你 x 會怎樣變化？

階段 1 求解邏輯斯諦方程（logistic equation）

涵蓋：沒有移除時的種羣數量

想一想 分離變數（separate the variables），並把 $\frac{1}{(2K-x)x}$ 分解為部分分式（partial fractions）。

想一想 利用 $t=0$ 時 $x=K$ 求出常數。然後整理成 x 的表達式，看看當 $t\to\infty$ 時會怎樣。

階段 2　收穫（harvesting）

涵蓋：以速率 L 移除

想一想　以速率 L 移除細菌，即是從增長率中減去 L。對 $(2K - x)x - L$ 配方（complete the square），並設 $K^2 - L = \alpha^2$。

停一停，試一試　代入 $y = x - K + \alpha$。y 滿足甚麼方程？$y(0)$ 又是多少？把 K 換成 α，與第一部分比較。

背後的數學

臨界點

有收穫的方程有兩個平衡點，$K + \alpha$ 和 $K - \alpha$。上面的一個是穩定（stable）的：種羣數量稍高於或稍低於它，都會回到它那裏。下面的一個是不穩定（unstable）的：種羣數量只要稍低於 $K - \alpha$，便會一直下跌，直至滅絕。隨着收穫率 L 增加，$\alpha = \sqrt{K^2 - L}$ 會縮小，兩個平衡點互相靠近；到 $L = K^2$ 時兩者合而為一，而當 $L > K^2$ 時則完全沒有平衡點，任何種羣都會崩潰（圖 8.3.1）。這是一個鞍結分岔（saddle-node bifurcation），是最簡單的一種臨界點（tipping point）。它的可怕之處，在於事前沒有任何明顯的預

兆：當 L 接近 K^2 時，平衡種羣數量只是緩緩下降，然後平衡點突然不復存在。事後才減少收穫未必有用，因為種羣數量可能已經跌到不穩定的閾值以下。

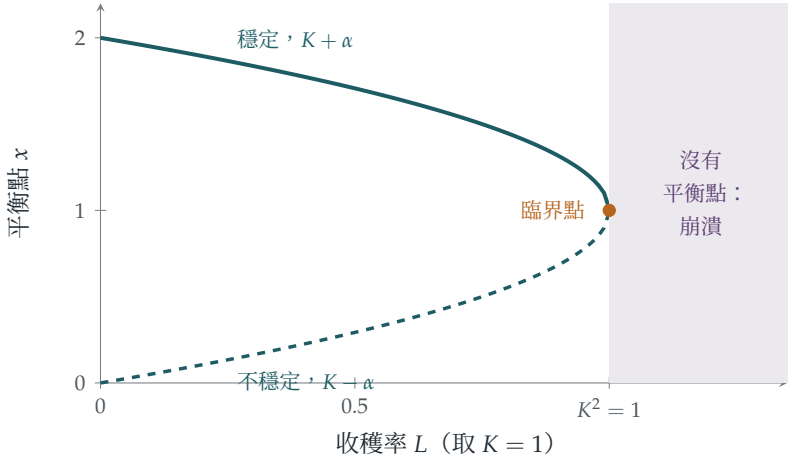

圖 8.3.1 平衡種羣數量與收穫率 L 的關係，其中 $K=1$。隨着 L 增加，穩定平衡點（實線）與不穩定閾值（虛線）互相靠近，並在 $L=K^2$ 處相遇。越過這一點之後，平衡點不再存在，無論種羣有多大都會崩潰。

最大可持續產量

種羣所能承受的最大收穫量是多少？答案是 $L=K^2$，即增長率 $(2K-x)x$ 的峯值，在種羣數量維持於 K（環境承載力的一半）時達到。二十世紀中葉，漁業科學採納了這個「最大可持續產量」（maximum sustainable yield）作為管理目標。可是，恰好按最大值收穫，就等於把系統恰好放在臨界點上，只要稍為高估了 K，或者遇上一個壞年頭，便會引致崩潰。紐芬蘭對開的大淺灘（Grand Banks）鱈魚漁場，五百年來一直是全世界最豐饒的漁場之一，卻在 1990 年代初崩潰；1992 年，加拿大政府頒布禁捕令，令數以萬計的人失去工作。魚類資源至今仍未完全恢復。

其他地方的邏輯斯諦增長

邏輯斯諦方程由 Pierre-François Verhulst 於 1838 年提出，用來為人類人口建立模型。同一條 S 形曲線，也描述了疫症初期的傳播、新科技的普及、自催化化學反應以及腫瘤的生長。它的離散時間版本，即邏輯斯諦映射（logistic map），表現卻截然不同：它可以是混沌（chaotic）的，我們會在 Section 8.7 看到。

延伸練習

1. **由低處出發。**在有收穫且 $K^2 > L$ 的情況下，證明若 $x(0) < K - \alpha$，則種羣數量會在有限時間內降至零。（提示：當 $y(0) < 0$ 時，y 會怎樣變化？）

2. **過度收穫。**若 $L > K^2$，設 $\beta = \sqrt{L - K^2}$。在 $x(0) = 2K$ 的條件下解 $x' = -(x - K)^2 - \beta^2$，並求種羣數量何時降至零。

3. **按比例收穫。**假設改為移走種羣中某個固定的比例：$x' = (2K - x)x - hx$。求平衡點，並證明對所有 $h < 2K$，種羣都能存活。為甚麼這個方案較為安全？

4. **半程時間。**在沒有收穫的情況下，求種羣數量達到 $\frac{3}{2}K$ 的時間。

延伸閱讀

- **Steven Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos***（CRC Press）。第 3 章討論分岔，並以這個收穫模型作為習題。
- **Nicholas Britton, *Essential Mathematical Biology***（Springer）。為大學本科生而寫的種羣模型。
- **Mark Kurlansky, *Cod: A Biography of the Fish That Changed the World***（Penguin）。鱈魚漁業及其崩潰的歷史。

完整的引導式解答見第 8.3 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch08/harvesting.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com