8.2 不求解而估界

工作紙

題目

STEP III 2013，第 7 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/13-s3-q7

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想　在第 (i) 部分，把 y 看成質點的位置，把 x 看成時間。那麼 $y'' = -y^3$ 就是牛頓定律，其中力為 $-y^3$。動能（kinetic energy）和勢能（potential energy）分別是甚麼？

階段 1 守恆（Conservation）

涵蓋：第 (i) 部分

想一想 利用鏈式法則（chain rule）把 E 對 x 求導，並抽出因子 $2y'$。對於餘下的括號，微分方程（differential equation）告訴了你甚麼？

想一想 因此 E 是常數。求出它在 $x = 0$ 時的值。由於 $(y')^2 \geq 0$，這對 y^4 說明了甚麼？

階段 2　耗散（Dissipation）

涵蓋：第 (ii) 部分

> **停一停，試一試**　再次把 E 求導，並利用方程代換 $v'' + \sinh v$。當 $x \geq 0$ 時，$\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}x}$ 的正負號是甚麼？比較 $\mathrm{E}(x)$ 與 $\mathrm{E}(0)$，並計算 $\cosh(\ln 3)$。

階段 3 構造能量

涵蓋：第 (iii) 部分

停一停，試一試 試設 $\mathrm{E} = (w')^2 + F(w)$。求導，然後選取 $F'(w)$，使得可以利用方程代換 w''，最後只餘下 $(w')^2$ 的倍數。你需要一個導數（derivative）為 $w\cosh w$ 的函數：試試把 $w\sinh w$ 求導。

想一想 要證明 $5\cosh x - 4\sinh x - 3 \geq 0$，可用 e^x 和 e^{-x} 把它寫出來，並找出一個完全平方（perfect square）。然後比較 $\mathrm{E}(x)$ 與 $\mathrm{E}(0)$。$w\sinh w$ 的正負號是甚麼？

背後的數學

李雅普諾夫函數

李雅普諾夫在 1892 年的博士論文中研究運動的*穩定性*（stability）：如果一個系統受到輕微擾動而偏離平衡，它會回到平衡，還是愈走愈遠？他的「第二方法」是找出一個函數，它在平衡點處取最小值，而且沿着解永不增加；這種函數現在稱為*李雅普諾夫函數*（Lyapunov function）。這樣，從平衡點附近出發的解就會一直留在平衡點附近。這

個方法的美妙之處，在於它不需要解的公式，只需要微分方程本身，而這正是本題所展示的。現今，從飛機控制系統、電網以至生態系統，各種各樣事物的穩定性都是用李雅普諾夫函數來證明的。

物理與工程中的能量

第 (i) 部分是一個非線性振子（nonlinear oscillator）：它像彈簧，但回復力與位移的立方成正比。與簡諧振子不同，它的週期取決於振幅（振盪愈大，速度愈快），但能量守恆仍然把它困住。第 (ii) 部分加入了隨時間增強的阻尼（damping），能量因而逐漸流失。在工程學中，人們用能量方法來證明結構不會把自己搖散，以及控制系統不會振盪至失控。在偏微分方程（partial differential equation）的理論中，這類「能量估計」是證明解存在而且性質良好的主要工具；有關流體流動方程的問題，包括千禧年大獎難題（Millennium Prize Problems）之一的納維－斯托克斯（Navier–Stokes）問題，歸根究底就是能否找到這樣的界。

延伸練習

1 **簡諧運動。**對於 $y'' + y = 0$，其中 $y(0) = A$、$y'(0) = 0$，求守恆的能量，並由此推出 $|y| \le A$。用精確解核對。

2 **單擺。**單擺的角度 θ 滿足 $\theta'' + \sin\theta = 0$（採用適當的單位）。證明 $(\theta')^2 - 2\cos\theta$ 是常數。若單擺在角度 θ_0 處由靜止開始，其中 $|\theta_0| \le \pi$，證明 $|\theta|$ 永不超過 $|\theta_0|$。若 $|\theta_0| > \pi$，哪裏會出問題？

3 **阻尼。**對於 $y'' + 2ky' + y = 0$，其中 $k > 0$，證明 $(y')^2 + y^2$ 遞減。它是否必定趨向零？

4 **逃逸。**對於 $y'' - y^3 = 0$，其中 $y(0) = 1$、$y'(0) = 0$，求一個守恆量，並證明它不能給出 y 的界。哪裏出了問題？

延伸閱讀

- **Steven Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos***（CRC Press）。第 6 章和第 7 章講述相平面、保守系統和李雅普諾夫函數。
- **D. W. Jordan & P. Smith, *Nonlinear Ordinary Differential Equations***（Oxford University Press）。一本標準的大學本科教科書，載有大量能量方法的例子。
- **Keith Devlin, *The Millennium Problems***（Basic Books）。書中有一篇關於納維－斯托克

斯問題的淺白介紹。

完整的引導式解答見第 8.2 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch08/bounding-without-solving.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com