8.1 當解不唯一

工作紙

題目

STEP III 1994，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/94-s3-q4

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想　把兩邊開平方：$y' = \pm 2\sqrt{y}$。試試 $y = (x-c)^2$。它滿足這條方程嗎？有沒有更簡單的解？

階段 1　經過一點的解

涵蓋：經過 (a, b^2) 的兩個解

想一想　哪些拋物線（parabola）$y = (x-c)^2$ 經過點 (a, b^2)？解出 c。為甚麼兩個答案不同？

階段 2 兩個點與一個公共解

涵蓋：點 $(a_1, 1)$ 和 $(a_2, 1)$

想一想 哪一個解經過原點？它在何處達到高度 1？由此可得 a_1 和 a_2。列出經過每個點的兩個解，看看哪一個是它們共有的。

階段 3 整個曲線族與公切線

涵蓋：最後一部分：公切線（common tangent）

停一停，試一試 畫出若干條拋物線 $y = (x - c)^2$ 的草圖。哪一條直線與每一條拋物線都相切？這條直線本身是否方程的解？

階段 4　為何重要

涵蓋：最後一部分：切線為何相關

> **想一想**　哪些解經過 x 軸上的一點？你能否構造一個解，先沿 x 軸走一段，然後沿一條拋物線離開？它在各段相接之處是否可微（differentiable）？

背後的數學

解在甚麼時候是唯一的？

皮卡—林德洛夫定理（Picard–Lindelöf theorem，由皮卡（Émile Picard）和林德洛夫（Ernst Lindelöf）約於 1890–1894 年證明）指出，方程 $y' = F(x, y)$ 連同 $y(x_0) = y_0$ 在 x_0 附近恰好有一個解，條件是 F 對 y 滿足利普希茨（Lipschitz）條件：存在常數 L 使得 $|F(x, y_1) - F(x, y_2)| \le L|y_1 - y_2|$。粗略地說，當 y 變化時，F 不可以變化得無限快。我們的方程是 $y' = \pm 2\sqrt{y}$，而 $\sqrt{y}$ 在 $y = 0$ 處的斜率是無限大：它在該處不滿足利普希茨條件，而那裏正是唯一性失效的地方。（皮亞諾（Giuseppe Peano）在 1886 年證明了單憑 F 的連續性（continuity）已能保證解*存在*，但不能保證解唯一。）皮卡–林德洛夫定理的證明用到一個迭代（iteration），它憑藉 Section 2.2 的壓縮映射原理（contraction mapping principle）而收斂。

漏水的水桶

以下是一個物理例子。一個底部有孔的水桶按照托里拆利定律（Torricelli's law）流乾：水的高度 h 滿足 $h' = -k\sqrt{h}$。讓時間向前走，一切都沒有問題：水桶流乾，然後一直是空的。但讓時間倒流：假如你發現一個空桶，這條方程無法告訴你它是甚麼時候流乾的。在所有時間都有 $h = 0$ 的解，以及那些直到某一刻仍然盛滿、然後才流乾的解，全都與「現在是空的」相符。這種非唯一性，正是「關於過去的資訊已經失去」這個事實在數學上的投影。

Norton 圓頂

2003 年，哲學家 John Norton 描述了一個無摩擦的圓頂，其形狀使得一個恰好放在頂端的球所遵從的牛頓定律，形式為 $r'' = \sqrt{r}$。其中一個解是球永遠停在頂端。但還有其他的解：球在頂端停留任意長的時間，然後在沒有任何原因的情況下，自發地朝任意方向滾下。這個例子至今仍有爭論：古典力學到底是否決定論（deterministic）的？從數學上看，這正是本題所見的那種非唯一性。

延伸練習

1 **兩種增長率。**試做 STEP II 2018，第 8 題（step.maths.org/questions/18-s2-q8）。該題用代換法（substitution）解兩條增長方程。然後想一想，為甚麼 $y = 0$ 也是具有相同初始值的解，而這對唯一性又說明了甚麼。

2 **漏水的水桶。**解 $h' = -k\sqrt{h}$，其中 $h(0) = h_0 > 0$。水桶在甚麼時候變空？寫出兩個不同的解，使得對某個 T 有 $h(T) = 0$，並且對所有 $t \geq T$ 有 $h(t) = 0$。

3 **恢復唯一性。**證明 $y' = 2y$ 連同 $y(0) = 0$ 只有 $y = 0$ 這一個解。（提示：考慮 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(ye^{-2x})$。）$2y$ 具有甚麼性質，是 $2\sqrt{y}$ 所沒有的？

4 **立方。**求 $y' = 3y^{2/3}$ 經過原點的所有解。

延伸閱讀

- **Morris Hirsch, Stephen Smale & Robert Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos***（Academic Press）。講述存在性與唯一性，以及本章其餘的大部分內容。
- **George Simmons, *Differential Equations with Applications and Historical Notes***（CRC Press）。一本經典著作，富於歷史掌故；書中討論了奇解與包絡線。
- **John Norton,「The dome: an unexpectedly simple failure of determinism」**，*Philosophy of Science* 75 (2008)。篇幅短小，容易閱讀。

完整的引導式解答見第 8.1 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch08/non-uniqueness.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com