7.9 只有五種柏拉圖立體

工作紙

題目

STEP III 1999，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/99-s3-q4

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想　用正方體驗證歐拉公式：它有多少個頂點（vertex）、多少條棱（edge）、多少個面（face）？以正方形為底的棱錐體（pyramid）又如何？

想一想　在正多面體中，每個面有 m 條棱，而每條棱是兩個面的公共邊。由此可得 E 與 F 之間的甚麼方程？同樣地，E 與 V 之間又有甚麼方程？

階段 1　F 的公式

涵蓋：推導 F 的公式

? **想一想**　利用 $mF = 2E$ 和 $nV = 2E$，把 E 和 V 用 F 表示，再代入歐拉公式（Euler's formula），解出 F。

? **想一想**　展開 $4 - (n-2)(m-2)$，並與你所得的分母比較。

階段 2　m 和 n 可以取哪些值？

涵蓋：證明只有五種

想一想　m 的最小可能值是多少？n 呢？既然 $F > 0$，h 必須是正還是負？

停一停，試一試　你需要 $(n-2)(m-2) < 4$，而且兩個因子都至少為 1。列出所有可能的情況。對每一種情況，求出 h、F、E 和 V，並說出該立體的名稱。

背後的數學

歐拉公式與拓撲學

歐拉在 1750 年提出 $V - E + F = 2$，但他的證明有漏洞；這條公式其後經歷了一段引人入勝的歷史，當中有一次又一次的嘗試證明、反例（counterexample）和修補。一個「畫框」形的多面體，中間穿了一個正方形的洞，有 $V - E + F = 0$；由兩個正方體在一個頂點處相連而成的多面體，則有 $V - E + F = 3$。拉卡托斯（Imre Lakatos）把這段歷史寫成一本名著 *Proofs and Refutations*（《證明與反駁》），探討數學概念如何在反例的磨礪下變得精確。最終的答案是：$V - E + F$ 只取決於曲面在拓撲學（topology）那種寬鬆意義下的形狀：凡是可以變形成球面的曲面，它等於 2；環面（torus，即冬甩形）

是 0；有 g 個洞的曲面則是 $2-2g$。這個數稱為**歐拉示性數**（Euler characteristic），是拓撲學最早的概念之一；拓撲學研究的，就是經拉伸和彎曲後仍然不變的性質。

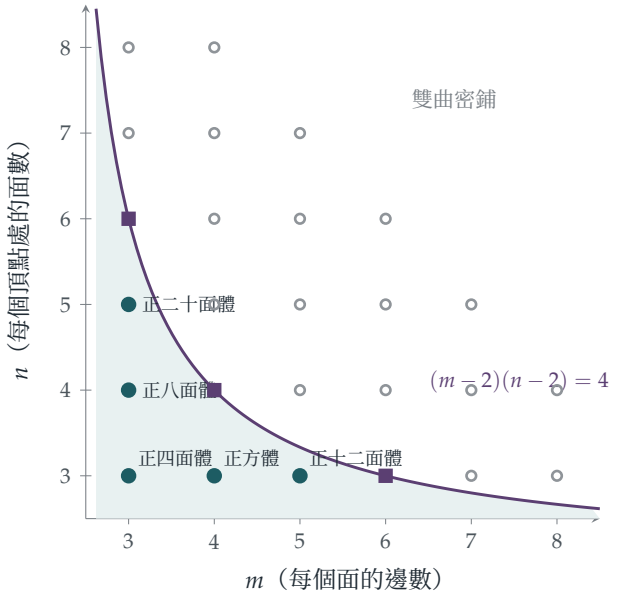

圖 7.9.1 滿足 $m,n \geq 3$ 的所有可能數對 (m,n)。在曲線 $(m-2)(n-2)=4$ 下方（陰影部分）的是五種柏拉圖立體（藍綠色）。在曲線上的是平面的三種密鋪（紫紅色方點）：分別用三角形（$m=3$，$n=6$）、正方形（4,4）和六邊形（6,3）。曲線上方的每一點（空心圓圈）都對應雙曲平面的一種正則密鋪。

球面以外

當 $h=0$ 或 $h<0$ 時又會怎樣？當 $(m-2)(n-2)=4$ 時，有三組解：(3,6)、(4,4) 和 (6,3)，即六個三角形、四個正方形或三個六邊形在一點相接，各角之和恰好是 360°。這就是平面的三種正則密鋪（regular tiling），也就是浴室地磚和蜂巢的圖案。而當 $(m-2)(n-2)>4$ 時，一個頂點處各角之和大於 360°，這在平面上不可能出現，但在 Section 5.8 的雙曲平面（hyperbolic plane）上卻完全可行。雙曲平面有無窮多種正則密鋪，圖 7.9.1 中曲線上方的每一點各對應一種；艾雪（Escher）的木刻版畫 *Circle Limit*（《圓極限》）系列，畫的就是其中幾種。所以，柏拉圖立體的分類其實是一個三分法（trichotomy）的第一種情況，這個三分法（球面、平面、雙曲平面）貫穿整個幾何學。

對稱羣

柏拉圖立體的對稱構成羣（group）：正四面體有 12 個旋轉，正方體和正八面體有 24 個（兩者互為對偶（dual）：把面與頂點互換，$m \leftrightarrow n$），正十二面體和正二十面體則有 60

個。這個階（order）為 60 的正二十面體羣是一個「單」羣（simple group）；正如我們在 Section 6.4 提過，正是它令五次方程（quintic）不能用根式（radicals）求解。克萊因（Felix Klein）寫了一整本書 *Lectures on the Icosahedron*（《正二十面體講義》，1884），把正二十面體與五次方程的解法聯繫起來。

延伸練習

1 **對偶性。**證明把 m 和 n 互換，會令 V 和 F 互換，而 E 保持不變。哪幾對柏拉圖立體互為對偶？哪一個是自對偶的？

2 **足球。**傳統的足球由 12 個五邊形和 20 個六邊形組成，每個頂點處有三個面相接。利用雙重計數和歐拉公式，驗證 $V - E + F = 2$。再證明更一般的結果：任何這樣由五邊形和六邊形組成、每個頂點處有三個面相接的多面體，都恰好有 12 個五邊形。

3 **環面。**造一個「畫框」形的多面體（一個正方形方塊，中間有一個正方形的洞），數出 V、E 和 F。驗證 $V - E + F = 0$。

4 **頂點處的角。**正 m 邊形的內角（interior angle）是 $180°(1 - \frac{2}{m})$。證明 n 個這樣的角能圍着凸立體的一個頂點拼合（總和小於 360°），當且僅當 $(m-2)(n-2) < 4$，從而得出這個分類的第二個證明。

延伸閱讀

- **David Richeson, *Euler's Gem***（Princeton University Press）。講述 $V - E + F = 2$ 的歷史，以及它如何引出拓撲學。非常適合高中第六學級（sixth form）的學生閱讀。
- **Imre Lakatos, *Proofs and Refutations***（Cambridge University Press）。一場關於歐拉公式和證明本質的對話。
- **H. S. M. Coxeter, *Regular Polytopes***（Dover）。論述正多面體及其高維同類的經典著作。

完整的引導式解答見第 7.9 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch07/platonic-solids.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com