7.8 四個平方數

工作紙

題目

STEP III 1994，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/94-s3-q8

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想　回想兩平方的版本：$(a^2+b^2)(p^2+q^2)$ 是兩個平方數之和，因為對複數 $z=a+b\mathrm{i}$、$w=p+q\mathrm{i}$ 有 $|z|^2|w|^2=|zw|^2$。矩陣可以怎樣把這個結果推廣到四個平方？

階段 1　行列式是四個平方之和

涵蓋：每個矩陣的行列式

想一想　求出 $\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -z_2^{*} & z_1^{*} \end{pmatrix}$ 的行列式（determinant）。對於複數（complex number）z，zz^{*} 是甚麼？

階段 2 乘積具有相同的形式

涵蓋：兩個矩陣的乘積

停一停，試一試 把兩個矩陣（matrix）相乘。把乘積的第一行記作 (w_1, w_2)。第二行是否就是 $(-w_2^*, w_1^*)$？然後對等式兩邊取行列式。

階段 3 讀出四個平方

涵蓋：求 L_1、L_2、L_3、L_4

想一想 把 w_1 和 w_2 以 a, b, c, d, p, q, r, s 展開，再把它們各自分成實部(real part)和虛部（imaginary part）。這四個部分就是你要找的 L。

背後的數學

拉格朗日四平方和定理

拉格朗日的證明大致如下。根據歐拉恆等式，只需證明每個質數 p 都是四個平方數之和。先用一個計數論證，證明存在某個倍數 mp（其中 $m < p$）是四個平方數之和。然後用一個巧妙的「遞降法」(descent) 證明：若 mp 是四個平方數之和而 $1 < m < p$，則

對某個更小的 m'，$m'p$ 也是四個平方數之和；如此重複下去，便會到達 $m = 1$。（可與 Section 1.5 中費馬的遞降法比較。）1834 年，雅可比（Jacobi）更進一步，求出把 n 寫成四個平方數之和的方法的確切數目：n 的所有非 4 的倍數的因數之和的 8 倍。例如，1 有 8 種寫法（± 1 可放在四個位置中的任何一個）。

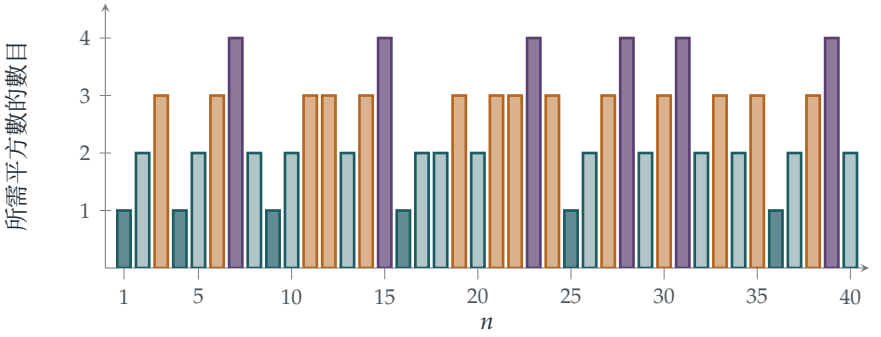

圖 7.8.1　由 1 至 40 的每個 n 最少需要多少個平方數才能組成。根據拉格朗日定理，每個數最多只需四個。需要四個的數（紫紅色）是 $7, 15, 23, 28, 31, 39, \ldots$：根據勒讓德（Legendre）和高斯（Gauss）的一條定理，它們正好是形如 $4^k(8m + 7)$ 的數。

二、三、四

不同維數之間的規律相當微妙。兩平方和來自複數，而一個數是兩個平方數之和，當且僅當它的質因數中形如 $4k + 3$ 的都以偶數次冪出現（Section 1.6）。四平方和來自四元數，而每個數都是四平方和。但三平方和卻完全沒有乘法恆等式（並不存在一個「大小」具可乘性的三維數系；這正是哈密頓（Hamilton）研究三元組時失敗的原因，見 Section 6.7），相應的定理也較難：勒讓德和高斯證明了，除非 $n = 4^k(8m + 7)$，否則 n 是三個平方數之和（圖 7.8.1）。四以上，八維的八元數（octonion）給出一條八平方恆等式，由 Degen 和 Graves 發現；而胡爾維茲（Hurwitz）於 1898 年證明，這類恆等式只在 1、2、4 和 8 個平方的情況下存在。

華林問題

拉格朗日定理是華林（Edward Waring）於 1770 年提出的一個問題的第一個情況：對每個 k，是否存在一個數 $g(k)$，使得每個正整數都是最多 $g(k)$ 個 k 次冪之和？希爾伯特（David Hilbert）於 1909 年證明了確實存在。現在我們知道 $g(2) = 4$、$g(3) = 9$（例如 $23 = 2 \cdot 2^3 + 7 \cdot 1^3$ 需要九個立方數）以及 $g(4) = 19$。

延伸練習

1 **一個實例。**利用 $L_1, \ldots, L_4$ 的公式，取 $(a,b,c,d) = (p,q,r,s) = (2,1,1,1)$，把 $49 = 7 \times 7$ 寫成四個平方數之和，並驗算你的答案。它與顯而易見的 $49 = 7^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2$ 是否相同？

2 **四平方中的兩平方。**證明若 $c = d = r = s = 0$，這條恆等式便簡化為 Section 1.6 的兩平方恆等式。

3 **需要四個平方的數。**考慮平方數模 8 的餘數，證明形如 $8m + 7$ 的數都不是三個平方數之和。

4 **雅可比公式。**數一數把 2 表示成四個平方數之和的方法有多少種（次序和正負號不同均視為不同），並驗證答案是 $8 \times (1 + 2) = 24$。

延伸閱讀

- **Harold Davenport, *The Higher Arithmetic***（Cambridge University Press）。第 V 章證明了拉格朗日四平方和定理。
- **John Conway & Derek Smith, *On Quaternions and Octonions***（A. K. Peters）。講述四元數的算術，包括利用四元數整數證明四平方和定理。
- **Aigner & Ziegler, *Proofs from THE BOOK***，「Representing numbers as sums of two squares」（把數表示成兩個平方數之和）一章。與本節相配的兩平方版本。

完整的引導式解答見第 7.8 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch07/four-squares.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com