7.7 永恆不變的量

工作紙

題目

STEP III 2024，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2024 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

> **想一想**　表達式 $\mathbf{MN} - \mathbf{NM}$ 稱為 $\mathbf{M}$ 與 $\mathbf{N}$ 的交換子（commutator）。它在甚麼時候等於零？根據第 (i) 部分，它的跡是多少？

階段 1　跡

涵蓋：第 (i) 部分

> **想一想**　設 $\mathbf{N} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$，只須計算 $\mathbf{MN}$ 和 $\mathbf{NM}$ 的對角線元素。

階段 2 行列式的導數

涵蓋：第 (ii) 部分

想一想 用積法則（product rule）對 $ad - bc$ 求導。然後利用 2×2 矩陣的逆矩陣（inverse matrix）公式，計算 $\mathbf{M}^{-1}\frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t}$ 的對角線元素。

階段 3　三個守恆量

涵蓋：第 (iii) 部分：三個常數

想一想　至於跡（trace），對微分方程（differential equation）兩邊取跡，再運用第 (i) 部分的結果。

停一停，試一試　至於行列式（determinant），在方程兩邊左乘 $\mathbf{M}^{-1}$，再運用第 (ii) 部分的結果。你會用到 $\operatorname{tr}(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{M}) = \operatorname{tr}\mathbf{N}$：這為甚麼成立？至於 $\operatorname{tr}(\mathbf{M}^2)$，把它用 $\operatorname{tr}\mathbf{M}$ 和 $\det\mathbf{M}$ 表示出來。

階段 4 **顯式解**

涵蓋：第 (iii) 部分：求解 $\mathbf{M}$

想一想 把 $\mathbf{N}$ 拆成 $t\mathbf{I}$ 加上 $t\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$。$t\mathbf{I}$ 這部分與 $\mathbf{M}$ 可交換（commute），所以會在 $\mathbf{MN}-\mathbf{NM}$ 中消去。

停一停，試一試 寫出 a、b、c、d 所滿足的四條微分方程。先解 c，再解 a 和 d，最後解 b。驗算你所得的跡和行列式確實是常數。

階段 5　另一條方程

涵蓋：第 (iv) 部分

> **停一停，試一試**　若 $\frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{M}\mathbf{N}$，則 $\mathbf{N} = \mathbf{M}^{-1}\frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t}$，而第 (ii) 部分把 $\operatorname{tr}\mathbf{N}$ 與 $\det\mathbf{M}$ 的變化聯繫起來。試找一個跡保持不變、行列式卻會改變的 $\mathbf{M}$，例如 $\begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{pmatrix}$。

背後的數學

孤立子與拉克斯對

1834 年，蘇格蘭工程師 John Scott Russell 策馬追蹤一個沿愛丁堡附近的聯合運河（Union Canal）前進的孤立波，追了超過一英里，波形始終沒有改變。這類波由*科特韋赫－德弗里斯*（*Korteweg–de Vries*，簡稱 *KdV*）*方程*描述。到了 1960 年代，Norman Zabusky 與 Martin Kruskal 的電腦實驗顯示，兩個這樣的「孤立子」可以相撞，然後原封不動地離開，彷彿它們是粒子一樣。要解釋這個現象，需要無窮多個守恆量。彼得．拉克斯在 1968 年證明，KdV 方程可以寫成 $\dot{L} = LP - PL$，其中 L 和 P 是一對微分算子（differential operators）；於是，與這道題完全一樣，L 的特徵值是守恆的，而它們正好提供了那無窮多條守恆定律。擁有拉克斯對的系統稱為*可積*（integrable）系統，它們屬於少數可以精確求解的非線性系統。

等譜流

由於 $\mathbf{M}$ 的跡和行列式決定了它的特徵多項式（characteristic polynomial）$\lambda^2 - (\operatorname{tr}\mathbf{M})\lambda + \det\mathbf{M}$，$\mathbf{M}$ 的特徵值不隨時間改變。流 $\dot{\mathbf{M}} = [\mathbf{M}, \mathbf{N}]$ 使 $\mathbf{M}$ 在特徵值固定的矩陣所組成的集合之內移動。事實上，解總是具有 $\mathbf{M}(t) = \mathbf{S}(t)^{-1}\mathbf{M}(0)\mathbf{S}(t)$ 的形式，其中 $\mathbf{S}(t)$ 是某個可逆矩陣：這個矩陣始終與它的初始值相似（similar）。同一個想法貫穿整個物理學：

在量子力學中，可觀測量（observable）$\mathbf{A}$ 按 $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\mathbf{H}, \mathbf{A}]$ 演化，其中 $\mathbf{H}$ 是能量，所以凡是與能量可交換的量都是守恆的。

雅可比公式

第 (ii) 部分對任何大小的可逆矩陣都成立，稱為**雅可比公式**（Jacobi's formula）。最穩妥的寫法是不用對數，寫成 $\frac{d}{dt}\det \mathbf{M} = \det \mathbf{M}\,\operatorname{tr}\!\left(\mathbf{M}^{-1}\dot{\mathbf{M}}\right)$，因為 $\det \mathbf{M}$ 可能是負數；對數形式 $\frac{d}{dt}\ln\det \mathbf{M} = \operatorname{tr}\!\left(\mathbf{M}^{-1}\dot{\mathbf{M}}\right)$ 需要 $\det \mathbf{M} > 0$（一般情況下則用 $\ln|\det \mathbf{M}|$）。由此可得一個推論：若 $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{A}\mathbf{M}$，其中 $\mathbf{A}$ 是常數矩陣，則 $\det \mathbf{M}(t) = e^{t\operatorname{tr}\mathbf{A}}\det \mathbf{M}(0)$。在微分方程的研究中，這個結果告訴你相空間（phase space）中的體積如何增長或縮小；對於經典力學的方程，這個跡等於零，體積保持不變，這個結果稱為**劉維爾定理**（Liouville's theorem）。

延伸練習

1. **驗算解。**透過求導，驗證第 4 階段的矩陣 $\mathbf{M}(t)$ 滿足 $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M}\mathbf{N} - \mathbf{N}\mathbf{M}$。

2. **相似性。**證明：若 $\mathbf{M}(t) = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{M}_0\mathbf{S}$，其中 $\mathbf{M}_0$ 是常數矩陣，而 $\mathbf{S}(t)$ 滿足 $\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{S}\mathbf{N}$，則 $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M}\mathbf{N} - \mathbf{N}\mathbf{M}$。（提示：$\frac{d}{dt}\mathbf{S}^{-1} = -\mathbf{S}^{-1}\dot{\mathbf{S}}\mathbf{S}^{-1}$。）

3. **體積增長。**設 $\mathbf{M}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$。求滿足 $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M}\mathbf{N}$ 的 $\mathbf{N}$，並驗證 $\frac{d}{dt}\ln\det \mathbf{M} = \operatorname{tr}\mathbf{N}$。

4. **更高次冪。**直接證明：當 $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M}\mathbf{N} - \mathbf{N}\mathbf{M}$ 時，對每個正整數 k 都有 $\frac{d}{dt}\operatorname{tr}(\mathbf{M}^k) = 0$。

延伸閱讀

- **P. G. Drazin & R. S. Johnson, *Solitons: An Introduction***（Cambridge University Press）。大學本科程度的標準入門書，內容包括拉克斯對。
- **Thierry Dauxois & Michel Peyrard, *Physics of Solitons***（Cambridge University Press）。書中講述了 Scott Russell 那個孤立波的故事。
- **Dwight Neuenschwander, *Emmy Noether's Wonderful Theorem***（Johns Hopkins University Press）。講解對稱性如何帶來守恆定律。

完整的引導式解答見第 7.7 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch07/lax-pairs.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com