7.6 雙曲旋轉與相對論

工作紙

題目

STEP III 1991，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/91-s3-q6

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想　$\cosh u$ 和 $\sinh u$ 滿足哪一條恆等式，與 $\cos^2 u + \sin^2 u = 1$ 相對應？$\cosh(u+v)$ 和 $\sinh(u+v)$ 的加法公式又是甚麼？

階段 1 雙曲線（hyperbola）保持不變（invariant）

涵蓋：雙曲線，以及映射到自身的過原點直線

想一想 展開 $x'^2 - y'^2$。交叉項（cross terms）會互相抵消。最後一步要用哪一條恆等式（identity）？

停一停，試一試 若一條過原點的直線的方向是特徵向量（eigenvector），該直線便會映射到自身。試試方向 $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$。

階段 2　雙曲角（hyperbolic angle）相加

涵蓋：斜率（gradient），$v' = v + u$

想一想　斜率為 $\tanh v$ 的直線，方向為 $(\cosh v, \sinh v)$。把 T 作用於這個方向，並使用加法公式（addition formulas）。為甚麼直線是否通過原點並無影響？

階段 3 夾角何時保持不變？

涵蓋：夾角相等的條件

想一想 使用 $\tan\psi = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$，其中 $m_i = \tanh v_i$，然後把分子和分母同時乘以 $\cosh v_1 \cosh v_2$。

停一停，試一試 你應該會得到分子為 $\sinh(v_1 - v_2)$，分母為 $\cosh(v_1 + v_2)$。在 T 的作用下，兩者之中哪一個會改變？何時有 $\cosh(v_1 + v_2) = \cosh(v_1 + v_2 + 2u)$？

階段 4　圖像

涵蓋：相交於原點的直線

想一想　當 $v_1 + v_2 = -u$ 時，v_1' 和 v_2' 是甚麼？把新的直線與原來的直線對 x 軸的反射（reflection）作比較。

背後的數學

狹義相對論

在愛因斯坦的狹義相對論（1905 年）中，以恆定相對速度運動的不同觀察者，對時間和距離的量度並不一致，但他們對 $t^2 - x^2$ 這個量（取光速 $c = 1$）卻意見一致，這個量稱為時空間隔（spacetime interval）。保持它不變的變換就是勞侖茲變換（Lorentz transformation），而在一個空間維度的情況下，它們恰好就是本題的矩陣，其中 x 為時間、y 為距離。一個以速度 $v = \tanh u$ 運動的觀察者，所用的坐標與我們的坐標就是由這個矩陣聯繫起來，其中 $\cosh u = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$，即時間膨脹（time dilation）中著名的因子 γ。閔可夫斯基（Hermann Minkowski）在 1908 年看出，這使時空成為一種四維幾何，其「距離」之中帶有一個負號：「從今以後，空間本身和時間本身，都注定要消退成為影子。」

題目的物理意義

- **不變直線** $y = \pm x$ 是光線的路徑。它們對每個觀察者都相同：光速對所有人都一樣，這正是相對論的奠基原理。
- **雙曲線** $x^2 - y^2 = 1$ 是與原點相距一個單位「原時」（proper time）的所有事件所成的集合，而原時是由以各種可能的恆定速度運動的觀察者所量度的。
- **快度相加。**通過原點而斜率為 $\tanh v$ 的直線，是一個以速度 $\tanh v$ 運動的物體的路徑。快度為 u 的推進把它的速度變為 $\tanh(v+u) = \frac{\tanh v + \tanh u}{1 + \tanh v \tanh u}$，這就是 Section 3.8

中愛因斯坦的速度相加公式。速度不能直接相加，快度卻可以。

而在 Section 5.8 中，我們見過同一條加法公式，它是龐加萊圓盤（Poincaré disc）中的距離法則：相對論中所有可能的速度所成的集合，以快度來量度，就是一個雙曲空間（hyperbolic space）。

延伸練習

1 **推進的複合。**證明 $T(u)T(w) = T(u+w)$，其中 $T(u)$ 是題目中的矩陣。$T(u)^{-1}$ 是甚麼？

2 **時間膨脹。**一艘太空船以光速的 0.8 倍航行。求它的快度 u 和 $\cosh u$。若地球上過了 10 年，船上過了多少時間？（利用 $t_{\text{船}} = t_{\text{地球}} / \cosh u$。）

3 **雙曲面積。**證明由雙曲線 $x^2 - y^2 = 1$、x 軸，以及由原點至 $(\cosh v, \sinh v)$ 的線段所圍成的面積為 $\frac{v}{2}$，正如圓的相應面積為 $\frac{\theta}{2}$。為甚麼 T 必定保持這類面積不變？

4 **擠壓。**把坐標轉換為 $p = x + y$，$q = x - y$。證明 T 變成 $p \mapsto e^{u}p$，$q \mapsto e^{-u}q$，而雙曲線則變成 $pq = 1$。試在這組坐標下，以幾何方式描述這個變換。

延伸閱讀

- **Edwin Taylor & John Wheeler, *Spacetime Physics***（W. H. Freeman）。以快度和時空圖講解狹義相對論，適合具備高級程度（A-level）數學基礎的學生。
- **Tevian Dray, *The Geometry of Special Relativity***（CRC Press）。把相對論看成雙曲三角學，與本節的精神完全一致。
- **Albert Einstein, *Relativity: The Special and the General Theory***（多種版本）。愛因斯坦親自撰寫的通俗讀物，至今仍然十分易讀。

完整的引導式解答見第 7.6 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch07/hyperbolic-rotations.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com