7.5 三維空間中的旋轉

工作紙

題目

STEP III 2022，第 7 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2022 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

> **想一想**　當 $\mathbf{r}$ 垂直於 $\mathbf{n}$ 時，$\mathbf{n} \times \mathbf{r}$ 在幾何上是甚麼樣子？當 $\mathbf{r}$ 平行於 $\mathbf{n}$ 時又如何？

階段 1 兩次叉積

涵蓋：第 (i) 部分

想一想 設 $\mathbf{n} = (a, b, c)$ 及 $\mathbf{r} = (x, y, z)$。先求出 $\mathbf{n} \times \mathbf{r}$，再用 $\mathbf{n}$ 與它作一次叉積（cross product），然後觀察 x 分量（component）。

停一停，試一試 利用 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ 代換 $b^2 + c^2$。你能從餘下的式子中看出 $\mathbf{n}.\mathbf{r}$ 嗎？

階段 2　旋轉（rotation）

涵蓋：第 (ii) 部分

想一想　$\mathrm{g}(\mathbf{n})$ 是甚麼？記住 $\mathbf{n} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$。

停一停，試一試　現在取 $\mathbf{r}$ 垂直（perpendicular）於 $\mathbf{n}$。第 (i) 部分指出 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{r})) = -\mathbf{r}$。化簡 $\mathrm{g}(\mathbf{r})$。與 $\mathbf{r}$ 相比，$\mathbf{n} \times \mathbf{r}$ 是怎樣的？

階段 3 反射（reflection）

涵蓋：第 (iii) 部分

> **停一停，試一試** 利用第 (i) 部分化簡 h。h 對 $\mathbf{n}$ 有甚麼作用？對垂直於 $\mathbf{n}$ 的向量又有甚麼作用？

背後的數學

歐拉旋轉定理

三維空間中每一個固定原點的旋轉，都是繞某條通過原點的軸的旋轉。歐拉（Euler）於 1775 年證明了這一點。用矩陣的語言來說，每個 3×3 旋轉矩陣都有一個特徵值（eigenvalue）為 1 的特徵向量（eigenvector），也就是旋轉軸。羅德里格公式給出其逆命題：對每一條軸 $\mathbf{n}$ 和每一個角 θ，旋轉矩陣是

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \sin\theta\,\mathbf{K} + (1-\cos\theta)\,\mathbf{K}^2, \qquad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $\mathbf{K}$ 是 $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{n} \times \mathbf{r}$ 的矩陣。由於 $\mathbf{K}^3 = -\mathbf{K}$，指數級數（exponential series）$e^{\theta\mathbf{K}} = \mathbf{I} + \theta\mathbf{K} + \frac{\theta^2}{2!}\mathbf{K}^2 + \cdots$ 恰好化簡成這條公式，它就是 $e^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ 的三維版本。旋轉與「無窮小旋轉」$\mathbf{K}$ 的指數之間的這種聯繫，正是李羣（Lie groups）理論的起點。

旋轉不可交換

把一本書平放，先繞垂直軸旋轉 90°，再繞水平軸旋轉 90°；然後從頭再來，以相反的次序做這兩個旋轉。書最終的位置並不相同。三維空間中旋轉的複合（composition）不符合交換律，與二維的情況不同。這正是 Section 6.7 的四元數（quaternion）有用的原因之一：繞 $\mathbf{n}$ 旋轉 θ 對應於四元數 $\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}(a\mathrm{i} + b\mathrm{j} + c\mathrm{k})$，而複合旋轉就是把四元數

相乘，不可交換性已包含在其中。羅德里格本人在 1840 年的論文中，已找到旋轉的複合公式，比哈密頓（Hamilton）發明四元數還早三年。

延伸練習

1 **平面上的旋轉。**試做 STEP III 2017，第 2 題（step.maths.org/questions/17-s3-q2）。該題利用複數，證明平面上的兩個旋轉複合起來仍是一個旋轉，只有一種例外。找出這個例外，以及此時複合的結果是甚麼。

2 **一個具體的旋轉。**求繞方向為 $(1,1,1)$ 的軸旋轉 120° 的矩陣。證明它把各坐標軸循環置換。

3 **$\mathbf{K}$ 的冪。**證明 $\mathbf{K}^2\mathbf{r} = (\mathbf{n}.\mathbf{r})\mathbf{n} - \mathbf{r}$ 及 $\mathbf{K}^3 = -\mathbf{K}$，並由指數級數推導出羅德里格公式。

4 **兩次反射構成一個旋轉。**證明先後對兩個通過原點、互成 α 角的平面作反射，結果是繞兩平面的交線旋轉 2α。

延伸閱讀

- **Simon Altmann, *Rotations, Quaternions, and Double Groups***（Dover）。關於三維旋轉的權威論著，當中包括羅德里格的貢獻。
- **Simon Altmann, "Hamilton, Rodrigues, and the quaternion scandal"**, *Mathematics Magazine* 62 (1989)。一篇簡短而生動的歷史敍述。
- **John Stillwell, *Naive Lie Theory***（Springer）。為大學本科生而寫的旋轉、四元數與李羣入門。

完整的引導式解答見第 7.5 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch07/rotations-3d.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com