7.4 回到起點的矩陣

工作紙

題目

STEP II 2020，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2020 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

> **想一想**　每個 2×2 矩陣都滿足 $\mathbf{M}^2 - (\operatorname{tr}\mathbf{M})\mathbf{M} + (\det\mathbf{M})\mathbf{I} = \mathbf{0}$（這是凱萊－哈密頓定理（Cayley–Hamilton theorem）；把它乘開來驗證一下）。這對處理有關 $\mathbf{M}^2$ 的問題有甚麼幫助？

階段 1　平方的跡

涵蓋：第 (i) 部分

> **想一想**　把 $\mathbf{M}^2$ 乘開，再把對角線上的元素相加，然後與 $(a+d)^2$ 比較。

階段 2 $\pm\mathbf{I}$ 的平方根

涵蓋：第 (ii) 部分

想一想 把 $\mathbf{M}^2 = \mathbf{I}$ 代入 $\mathbf{M}^2 = t\mathbf{M} - d\mathbf{I}$，其中 $t = a + d$，$d = \det \mathbf{M}$。若 $t \neq 0$，$\mathbf{M}$ 必定是哪一類矩陣（matrix）？

停一停，試一試 證明 $t \neq 0$ 必然導致 $\mathbf{M} = \pm\mathbf{I}$，而這個情況已被排除。因此 $t = 0$：那麼 $\det \mathbf{M}$ 是多少？對 $\mathbf{M}^2 = -\mathbf{I}$ 作同樣的處理，並記得證明逆命題（converse）。

階段 3　四次方根

涵蓋：第 (iii) 部分

停一停，試一試　設 $\mathbf{N} = \mathbf{M}^2$，則 $\mathbf{M}^4 = \mathbf{I}$ 即是 $\mathbf{N}^2 = \mathbf{I}$。對 $\mathbf{N}$ 應用第 (ii) 部分的結果。為甚麼 $\det \mathbf{N}$ 不可能是 -1？

想一想　對於 $\mathbf{M}^4 = -\mathbf{I}$，對 $\mathbf{N}$ 應用第 (ii) 部分的後半部分，並利用第 (i) 部分，以 $\operatorname{tr} \mathbf{M}$ 和 $\det \mathbf{M}$ 表示 $\operatorname{tr} \mathbf{N}$ 和 $\det \mathbf{N}$。

階段 4 $\mathbf{I}$ **的一個並非旋轉的八次方根**

涵蓋：第 (iv) 部分

想一想 任何滿足 $\mathbf{M}^4 = -\mathbf{I}$ 的矩陣都有 $\mathbf{M}^8 = \mathbf{I}$。試找出一個跡（trace）和行列式（determinant）都符合要求、但元素並非旋轉（rotation）矩陣元素的矩陣。怎樣才能驗證它既不是旋轉，也不是反射（reflection）？

背後的數學

相似矩陣

為甚麼說第 4 步的 $\mathbf{M}$ 是「偽裝了的旋轉」？若存在可逆（invertible）矩陣 $\mathbf{S}$ 使得 $\mathbf{M} = \mathbf{S}\mathbf{R}\mathbf{S}^{-1}$，則稱兩個矩陣 $\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{R}$ 相似（similar）：它們在不同的坐標下表示同一個變換。相似矩陣有相同的跡和行列式，而且（對於不是 $\mathbf{I}$ 的倍數的 2×2 矩陣）逆命題也成立。所以任何跡為 $\sqrt{2}$、行列式為 1 的實矩陣都與 45° 的旋轉相似，而在 $\mathbf{S}$ 所給出的斜坐標下，它就只是在旋轉（圖 7.4.1（見網上該節的完整版））。一般而言，滿足 $\mathbf{M}^n = \mathbf{I}$ 的 2×2 實矩陣必定與某個旋轉或反射相似。

為甚麼晶體沒有五重對稱

晶體是原子有規律、重複的排列。晶體的旋轉對稱把原子所成的格（lattice）映射到它自身，所以在以這個格為基礎的坐標下，它由一個元素全是整數的矩陣給出。因此它的跡是整數。但是旋轉角為 θ 的旋轉，在任何坐標下的跡都是 $2\cos\theta$，而 $2\cos\theta$ 只有在等於 $-2, -1, 0, 1$ 或 2 時才是整數，也就是對應階（order）為 2、3、4 和 6（以及 1）的旋轉。五重對稱需要 $2\cos 72° = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$，而這不是整數。這就是晶體學限制定理（crystallographic restriction theorem）。1982 年，Dan Shechtman 觀察到一種看似具有五重對稱的合金，起初還遭人嘲笑；後來才知道那是一種準晶體（quasicrystal），有序但沒有周期性，就像彭羅斯鋪磚（Penrose tilings）一樣，因此不在該定理的涵蓋範圍之內。他於 2011 年

獲頒諾貝爾化學獎。

延伸練習

1. **三階的旋轉。**試做 STEP II 2021，第 7 題（載於 OCR 提供下載的 2021 年試卷，www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip）。它從一個具有不尋常性質的旋轉矩陣出發，最後得出一個結論，適用於所有立方為單位矩陣（identity matrix）的 2×2 實矩陣。

2. **六階。**求跡和行列式須滿足的條件，使得 $\mathbf{M}^6 = \mathbf{I}$，但 $\mathbf{M}^2 \neq \mathbf{I}$ 且 $\mathbf{M}^3 \neq \mathbf{I}$。

3. **晶體學限制。**證明：若 $\mathbf{M}$ 的元素全是整數，$\det \mathbf{M} = 1$，且對某個 n 有 $\mathbf{M}^n = \mathbf{I}$，則 $\operatorname{tr} \mathbf{M} \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$。找出一個階為 6 的整數矩陣。

4. **以凱萊－哈密頓定理求冪。**利用 $\mathbf{M}^2 = t\mathbf{M} - d\mathbf{I}$，把 $\mathbf{M}^3$ 和 $\mathbf{M}^4$ 表示成 $p\mathbf{M} + q\mathbf{I}$ 的形式，並藉此重新推導 $\mathbf{M}^4 = -\mathbf{I}$ 的條件。

延伸閱讀

- **M. A. Armstrong, *Groups and Symmetry***（Springer）。內容包括晶體學限制和牆紙圖案的分類。
- **Marjorie Senechal, *Quasicrystals and Geometry***（Cambridge University Press）。準晶體與非周期有序結構的數學。
- **Gilbert Strang, *Introduction to Linear Algebra***（Wellesley-Cambridge）。相似矩陣與凱萊－哈密頓定理。

完整的引導式解答見第 7.4 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch07/finite-order.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com