7.3 甚麼才算行列式

工作紙

題目

STEP II 2019，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2019 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

> **想一想** 題目中每個特殊矩陣各有甚麼作用？對一般的 $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，計算 $\mathbf{JM}$、$\mathbf{MJ}$、$\mathbf{KM}$ 和 $\mathbf{PM}$。

階段 1 單位矩陣

涵蓋：第 (i) 部分

> **想一想** 寫出 $\mathbf{M} = \mathbf{MI}$，然後對等式兩邊應用 f。你可以選一個合適的 $\mathbf{M}$，然後除以 $\mathrm{f}(\mathbf{M})$。

階段 2 對換

涵蓋：第 (ii) 部分

想一想 計算 $\mathbf{J}^2$。由此可以知道 $\mathrm{f}(\mathbf{J})^2$ 的甚麼？兩個可能的值之中，哪一個可以排除？

停一停，試一試 把題目給出的兩個矩陣（matrix）各自寫成 $\mathbf{J}$、$\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{J}$ 按某個次序相乘的乘積（product），然後應用 f。

階段 3　線性相關的行

涵蓋：第 (iii) 部分

> **停一停，試一試**　先取一個兩行（row）相等的矩陣 **B**。**JB** 是甚麼？應用 f，並利用第 (ii) 部分的結果。然後把 **B** 乘以 **K**，得出第二行是第一行 k 倍的矩陣。

階段 4 **錯切**

涵蓋：第 (iv) 部分

想一想 計算 $\mathbf{P}^2$ 和 $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{K}$。$k$ 取甚麼值時兩者相等？

停一停，試一試 對該等式兩邊應用 f，便會得到一條關於 $\mathrm{f}(\mathbf{P})$ 的方程（equation），它有兩個解。為甚麼 $\mathrm{f}(\mathbf{P})$ 不可能是 0？利用 $\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{I}$。

背後的數學

每個乘性函數都是行列式的函數

題目在 $\mathrm{f}(\mathbf{P}) = 1$ 處便停下，但這個論證是可以完成的。每個可逆矩陣都是初等矩陣（elementary matrices，即行對調、行縮放和錯切）的乘積，而題目已說明 f 在每一種上的表現。由此可知 $\mathrm{f}(\mathbf{M}) = \phi(\det \mathbf{M})$，其中 ϕ 是某個單一實數變量的函數，並滿足 $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$。行列式本身就是 $\phi(x) = x$ 的情況，但 $\phi(x) = x^3$ 或 $\phi(x) = |x|^{1/2}\operatorname{sign}(x)$ 同樣可行。換言之，行列式是矩陣上唯一眞正嶄新的乘性函數。用羣論（group theory）的語言來說，可逆矩陣所成的羣之中，凡是交換羣（commutative group）所能看見的一切，行列式都已盡數捕捉。

行列式作為面積

從幾何上看，2×2 矩陣把單位正方形變成一個平行四邊形，而 $\det \mathbf{M}$ 就是它的*有向面積*（signed area）：若定向（orientation）保持不變則為正，若定向反轉則為負（圖 7.3.1）。這樣，乘法性質的意義便一目了然：相繼進行兩個變換，面積的比例因子便會相乘。行對調會反轉定向，所以 $\det \mathbf{J} = -1$；錯切把正方形推斜成面積相同的平行四邊形，所以 $\det \mathbf{P} = 1$；而兩行線性相關的矩陣會把正方形壓扁，所以它的行列式為零。題目的每一步都有對應的圖像。

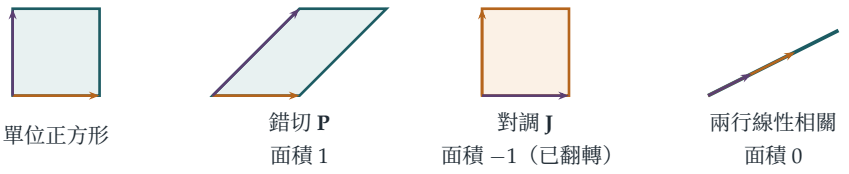

圖 7.3.1　行列式作為有向面積。兩個基向量（basis vectors）的像（琥珀色、梅紫色）張成一個平行四邊形。錯切保持面積不變；對調基向量會反轉定向；線性相關的兩行（或兩列）把正方形壓縮到一條直線上。相繼進行兩個變換，有向面積便會相乘，這正是性質 $\mathrm{f}(\mathbf{MN}) = \mathrm{f}(\mathbf{M})\mathrm{f}(\mathbf{N})$。

高維的行列式

對於 $n \times n$ 矩陣，行列式是有向體積的比例因子，並由三個性質所刻劃：它對每一行都是線性的，兩行對調時它會變號，而且它在單位矩陣上等於 1。單憑這三點，你就能推導出熟悉的展開公式，而高斯消元法則提供了一個高效的計算方法。行列式出現在多重積分的換元公式（雅可比行列式，Jacobian）之中，出現在逆矩陣的公式之中，並且如我們在 Section 5.4 所見，也出現在多項式的判別式（discriminant）之中。

延伸練習

1. **其他例子。**證明 $\mathrm{f}(\mathbf{M}) = (\det \mathbf{M})^3$ 滿足題目的所有條件，並證明 $\mathrm{f}(\mathbf{M}) = |\det \mathbf{M}|$ 滿足乘法性質，但不滿足 $\mathrm{f}(\mathbf{J}) \neq 1$。

2. **列運算。**證明對於任何第二列是第一列的倍數的矩陣，f 的值同樣為零。

3. **縮放。**設 $\mathbf{K}_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$。證明 $\mathrm{f}\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{f}(\mathbf{K}_k)$，並證明 $\mathrm{f}(\mathbf{K}_k)\mathrm{f}(\mathbf{K}_l) = \mathrm{f}(\mathbf{K}_{kl})$。

4. **歸結為行列式。**較難 證明每個可逆的 2×2 矩陣都可以寫成形如 $\mathbf{J}$、$\mathbf{K}_k$ 和 $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的矩陣的乘積。由此推導出 $\mathrm{f}(\mathbf{M})$ 只取決於 $\det \mathbf{M}$。

延伸閱讀

- **Sheldon Axler, *Linear Algebra Done Right***（Springer；網上免費閱覽）。從行列式的性質出發來定義行列式，與本題的精神一脈相承。
- **Gilbert Strang, *Introduction to Linear Algebra***（Wellesley-Cambridge）。第 5 章從三條規則出發建立行列式的理論。
- **3Blue1Brown, 「The determinant」**（影片，網上免費觀看）。以精美的動畫呈現行列式的面積詮釋。

完整的引導式解答見第 7.3 節：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch07/determinant-axioms.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com