7.2 只伸縮，不轉向

工作紙

題目

STEP III 1990，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/90-s3-q6

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

> **想一想**　T 使一個向量「方向不變，只乘以一個純量」，這是甚麼意思？試把它寫成一條等式。

階段 1　特徵向量

涵蓋：方向保持不變的兩個向量

> **想一想**　把矩陣（matrix）分別作用於 $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$。每個結果是否都是原來向量的倍數？是多少倍？

階段 2 圓的像

涵蓋：E 的方程及其面積

想一想 求出矩陣的逆矩陣（inverse matrix），從而以 X 和 Y 表示 x 和 y。代入 $x^2 + y^2 = 1$ 並化簡。

停一停，試一試 關於面積：線性映射（linear map）會把每個面積乘以其行列式（determinant）的絕對值。C 所圍的面積是多少？你可以用第一階段求得的兩個伸縮因子（stretch factor）來驗算答案。

階段 3　X 的最大值

涵蓋：X 在 E 上的最大值

想一想　以 C 上的點 (x, y) 表示 X。當 $x^2 + y^2 = 1$ 時，$9x - 2y$ 最大可以是多少？試把它看成與一個單位向量（unit vector）的點積（dot product）。

階段 4　切線

涵蓋：E 的切線

停一停，試一試　C 在 $\frac{1}{5}(3, 4)$ 的切線（tangent）是 $3x + 4y = 5$。線性映射把切線映射為切線，因此把你以 X 和 Y 表示 x 和 y 的式子代入這條直線。

背後的數學

譜定理

每個實對稱矩陣都有一整組互相垂直的特徵向量，而且特徵值都是實數。這就是譜定理（spectral theorem），是大學第一門線性代數（linear algebra）課程的核心結果之一。它告訴我們，每個對稱的線性映射，在合適的垂直坐標下，都只是沿各條軸的拉

伸。換個說法，每個像 $8X^2 + 12XY + 17Y^2$ 這樣的二次型（quadratic form），都可以經旋轉化成 $\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2$ 的形式，所以每條有心圓錐曲線（central conic）都是軸互相垂直的橢圓或雙曲線（*主軸定理*，principal axis theorem）。這個想法可追溯至 1820 年代的柯西（Cauchy），他用它來求二次曲面的主軸，以及固體內應力的主軸。

這一切之所以成立，全靠對稱性。不對稱的矩陣就未必這樣合作：旋轉 90° 會轉動每一個方向，所以它完全沒有實特徵向量；而錯切（shear）$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 只有一個特徵向量方向，所以它不是沿任何一對軸的拉伸。

無處不在的特徵向量

以下是特徵向量出現的其中幾個地方。

- **振動。**由質點和彈簧組成的系統會以*簡正模態*（normal mode）振動，即各部分以同一頻率同步運動的模式。這些模態是某個矩陣的特徵向量，而頻率則來自特徵值（Section 11.2）。
- **數據。**一團數據點分佈得最散的方向，就是其協方差矩陣（covariance matrix）的特徵向量。找出這些方向的方法稱為*主成分分析*（principal component analysis），是統計學和機器學習的基本工具之一（Section 13.7）。
- **量子力學。**量度一個物理量可能得到的結果，是某個矩陣（或算子）的特徵值，而原子的能級也是特徵值。
- **網上搜尋。**Google 的 PageRank 是這個搜尋引擎背後的原始構想：有一個描述網頁之間連結的巨型矩陣，PageRank 就按它那個特徵值為 1 的特徵向量的各個分量來為網頁排名。

延伸練習

1. **求特徵值。**證明 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的特徵值是 $\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0$ 的根，並驗證題目中的矩陣給出 $\lambda = 2$ 和 4。

2. **互相垂直的特徵向量。**證明若 $\mathbf{M}$ 是對稱矩陣，且 $\mathbf{Mu} = \lambda\mathbf{u}$、$\mathbf{Mv} = \mu\mathbf{v}$，其中 $\lambda \neq \mu$，則 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$。（*提示*：用兩種方法計算 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{Mu}$。）

3. **旋轉。**證明除非 θ 是 π 的倍數，否則旋轉矩陣 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 沒有實特徵向量。它的複特徵值是甚麼？

4　冪。利用特徵向量，求 $T^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$。（提示：把 $(1,0)$ 寫成 $(1,2)$ 和 $(2,-1)$ 的組合。）

延伸閱讀

- **Gilbert Strang, *Introduction to Linear Algebra***（Wellesley-Cambridge）。第 6 章是特徵值及其應用的出色入門。
- **Kurt Bryan & Tanya Leise, "The $25,000,000,000 eigenvector: the linear algebra behind Google"**，*SIAM Review* 48 (2006)。淺白易讀，可免費取閱。
- **3Blue1Brown, *Essence of Linear Algebra***（影片系列，可在網上免費觀看）。以精美的動畫呈現的，正是本節的幾何概念。

完整的引導式解答見第 7.2 節：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch07/eigenvectors.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com