7.1 對矩陣不成立的法則

工作紙

題目

STEP II 1993，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/93-s2-q6

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想　對實數而言，為甚麼 $ab = 0$ 可推出 $a = 0$ 或 $b = 0$？這個論證用到了數的哪一項性質？這項性質對矩陣成立嗎？

階段 1 可否 $\mathbf{AB} = 0$ 但 $\mathbf{BA} \neq 0$？

涵蓋：第 (i) 部分

想一想 使用含有大量零的 2×2 矩陣（matrix）。試試 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，它保留 x 分量，並把 y 分量消去。

停一停，試一試 找一個非零的 $\mathbf{B}$，使它把每個向量（vector）都送到 y 軸上，這樣 $\mathbf{A}$ 隨後便會把它消去。現在把 $\mathbf{BA}$ 也計算出來。它是零嗎？

階段 2　平方差

涵蓋：第 (ii) 部分

想一想　展開 $(\mathbf{A}-\mathbf{B})(\mathbf{A}+\mathbf{B})$，過程中不要調換任何乘積的次序。它在甚麼情況下等於 $\mathbf{A}^2-\mathbf{B}^2$？你可以再用第 (i) 部分的矩陣嗎？

階段 3　$\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ 的非零解

涵蓋：第 (iii) 部分

想一想　若 $\det \mathbf{A} \neq 0$，在 $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ 的左邊乘以 $\mathbf{A}^{-1}$。$\mathbf{X}$ 必定是甚麼？

停一停，試一試　若 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 且 $ad = bc$，試試列向量（column vector）$\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix}$。$\mathbf{A}$ 會把它們變成甚麼？用其中一個構造出非零的 $\mathbf{X}$。

階段 4　有多少個平方根？

涵蓋：第 (iv) 部分

> **停一停，試一試**　選取 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$，使得 $\mathbf{X}^2 + \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B} = (\mathbf{X} - \mathbf{I})^2$。然後你需要許多滿足 $\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$ 的矩陣 $\mathbf{N}$：看看 $\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$。

背後的數學

矩陣作為一種代數

凱萊（Arthur Cayley）在 1858 年引入矩陣代數，把矩陣看成可以相加和相乘的單一對象，而不僅僅是係數表。他立刻注意到乘法不滿足交換律，並證明了**凱萊—哈密頓定理**（*Cayley–Hamilton theorem*）：每個方陣都滿足它自己的特徵方程（characteristic equation）。對於跡（trace）為 t、行列式為 d 的 2×2 矩陣，這就是說 $\mathbf{M}^2 - t\mathbf{M} + d\mathbf{I} = \mathbf{0}$，本章會反覆用到這個事實（Section 7.4）。2×2 實矩陣構成一個**環**（*ring*）：可以加、減、乘，但乘法不滿足交換律，而且存在**零因子**，即乘積為零的非零元素。

無窮多個平方根

第 4 階段的結論還可以變得更加驚人。方程 $\mathbf{X}^2 = \mathbf{I}$ 有明顯的解 $\pm\mathbf{I}$，但平面上對任何一條通過原點的直線的反射（reflection）$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ 也都是解，因為反射兩次等於甚麼也沒做。這就是 $\mathbf{I}$ 的一整個圓那麼多的平方根。係數為數的 n 次多項式最多有 n 個根，是因為數沒有零因子；矩陣卻有，於是這個根的數目上限便不再成立。

物理學中的非交換性

在經典力學中，位置 x 和動量 p 都是數，並且 $xp = px$。在量子力學中，它們變成算子（operator，即無窮矩陣），滿足 $xp - px = \mathrm{i}\hbar$，其中 $\hbar$ 是普朗克（Planck）常數除以 2π。單憑這一條非交換關係，就可推出海森堡的不確定性原理：位置和動量不可能同時被準確得知。海森堡在 1925 年發現量子力學的法則時，並不知道矩陣是甚麼；是玻恩（Max Born）認出海森堡所發明的那條奇怪的乘法法則就是矩陣乘法。

延伸練習

1 **甚麼時候可交換？**求所有與 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 可交換的 2×2 矩陣。

2 **零的平方根。**求所有滿足 $\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$ 的 2×2 實矩陣 $\mathbf{N}$。（提示：利用凱萊–哈密頓定理證明 $\operatorname{tr}\mathbf{N} = \det\mathbf{N} = 0$。）

3 **反射。**證明每個反射矩陣 $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ 的平方都是 $\mathbf{I}$，並求出它所對應的反射軸。

4 **凱萊–哈密頓定理。**以直接計算證明每個 2×2 矩陣都滿足 $\mathbf{M}^2 - (\operatorname{tr}\mathbf{M})\mathbf{M} + (\det\mathbf{M})\mathbf{I} = \mathbf{0}$。

延伸閱讀

- **Gilbert Strang, *Introduction to Linear Algebra***（Wellesley-Cambridge）。最受歡迎的線性代數入門教科書，着重理解。
- **Sheldon Axler, *Linear Algebra Done Right***（Springer；可在網上免費閱讀）。取向較為抽象，以線性映射而非矩陣為中心。
- **Jim Baggott, *The Quantum Story***（Oxford University Press）。量子力學的歷史，包括海森堡的矩陣力學。

完整的引導式解答見第 7.1 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch07/matrix-rules.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com